



Concours d'entrée ingénieur généraliste et ingénieur informatique

Candidats des classes préparatoires aux
grandes écoles inscrits au concours
communs du SCEI

Annales 2025

Les épreuves de français, anglais, mathématiques sont communes.

L'épreuve de sciences physiques comprend deux exercices communs aux deux filières, et un exercice propre à chacune.

Le corrigé des épreuves figure en fin de ce recueil.

Concours d'entrée en Formation d'Ingénieurs

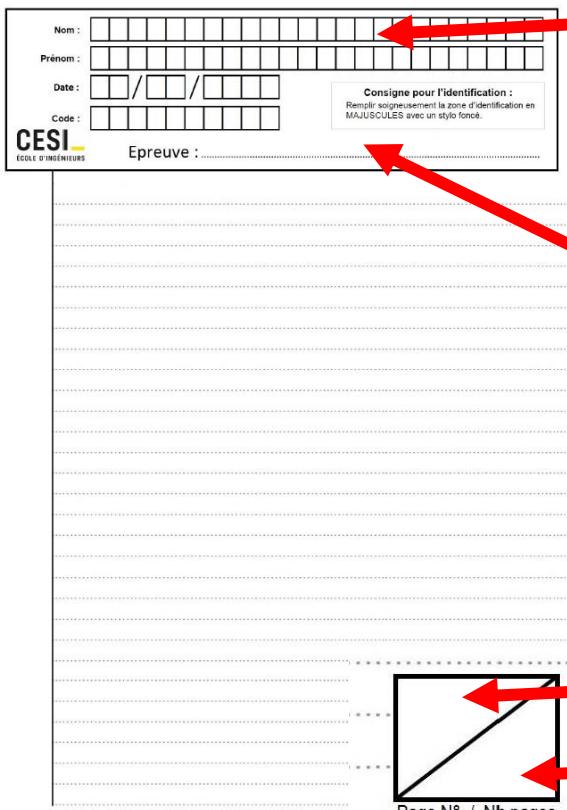
CESI
ÉCOLE D'INGÉNIEURS

MATHEMATIQUES
9 avril 2025
Durée : 3 heures

A LIRE ATTENTIVEMENT AVANT DE COMMENCER

L'épreuve de mathématiques est composée d'exercices à rédiger.

La composition s'effectue exclusivement sur les feuillets recto-verso mis à disposition. Utilisez bien les deux côtés du feuillet.



Renseignez clairement le cartouche de chaque feuillet avec vos nom, prénom, code candidat, ainsi que la date du jour de l'épreuve.

Le nom de l'épreuve est
« Mathématiques »

Remplissez systématiquement la case de pagination en numérotant vos pages dans l'ordre :

- Numéro de page dans la partie supérieure gauche,
- Nombre total de pages dans la partie inférieure droite.

Le recto (côté du feuillet avec le cartouche) a un numéro de page impair, le verso (côté du feuillet sans cartouche) a un numéro de page pair.

Avant de rendre votre copie, rangez les différents feuillets dans l'ordre de pagination.

Dans le cas où vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le très lisiblement sur votre copie, proposez la correction et poursuivez l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

Les énoncés et les brouillons seront ramassés à la fin des épreuves pour être détruits.

Aucune calculatrice n'est autorisée pour cette épreuve.

Bon courage !

Concours d'entrée à CESI Ecole d'Ingénieurs

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée.

Sujet rédactionnel - 3h

page 1 sur 4

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

1 Suites de probabilités (14 points)

On considère trois points distincts du plan nommés A , B et C . Nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points.

À l'étape initiale ($n = 0$), on suppose que le pion se trouve sur le point A . Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

- le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n + 1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n , plus précisément il ne dépend pas des positions occupées aux autres étapes précédentes ;
- pour passer de l'étape n à l'étape $n + 1$, on suppose que le pion a deux chances sur trois de rester sur place, sinon il se déplace de manière équitable vers l'un des deux autres points.

Pour tout n dans \mathbb{N} , on note :

- A_n : l'évènement « le pion se trouve en A à l'étape n » ;
- B_n : l'évènement « le pion se trouve en B à l'étape n » ;
- C_n : l'évènement « le pion se trouve en C à l'étape n ».

On note p_n (respectivement q_n et r_n) la probabilité de la réalisation de A_n (resp. B_n et C_n). et

$$V_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}.$$

Partie A

On considère la matrice M dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$M = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.1. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2^{n-1}} & 1 - \frac{1}{2^n} & 1 - \frac{1}{2^n} \\ 1 - \frac{1}{2^n} & 1 + \frac{1}{2^{n-1}} & 1 - \frac{1}{2^n} \\ 1 - \frac{1}{2^n} & 1 - \frac{1}{2^n} & 1 + \frac{1}{2^{n-1}} \end{pmatrix}.$$

Concours d'entrée à CESI Ecole d'Ingénieurs

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée.

Sujet rédactionnel - 3h

page 2 sur 4

- 1.2. Donner p_0 , q_0 et r_0 puis calculer p_1 , q_1 et r_1 .
- 1.3. Démontrer que pour tout n dans \mathbb{N} , on a la relation : $V_{n+1} = MV_n$.
- 1.4. En déduire que $V_n = M^n V_0$, puis une expression de p_n , q_n et r_n pour tout n dans \mathbb{N} .
- 1.5. Déterminer les limites respectives de chacun des termes généraux p_n , q_n et r_n quand n tend vers l'infini. Interpréter le résultat.
- 1.6. Après avoir vérifié que pour tout n entier naturel non nul :

$$p_{n+1} - q_{n+1} = \frac{1}{2}(p_n - q_n) \quad \text{et} \quad p_{n+1} - r_{n+1} = \frac{1}{2}(p_n - r_n)$$

retrouver le résultat précédent.

Partie B

Pour n dans \mathbb{N}^* , on note a_n le nombre moyen de passages du pion en A entre l'étape 1 et l'étape n , et on définit la variable aléatoire :

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si } A_n \text{ est réalisé,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- 1.7. Interpréter la variable aléatoire $X_1 + \dots + X_n$ et l'espérance $\mathbb{E}(X_1 + \dots + X_n)$.
- 1.8. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X_n pour n dans \mathbb{N}^* , et en déduire une expression de a_n .

2 Analyse (16 points)

Partie A

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. Pour tout n dans \mathbb{N}^* , on pose :

$$\begin{aligned} b_n &= n(a_n - a_{n+1}) \\ A_n &= \sum_{k=1}^n a_k \\ B_n &= \sum_{k=1}^n b_k. \end{aligned}$$

On prend, pour tout n entier naturel non nul : $a_n = \frac{1}{3^{n-1}}$.

- 2.1. Vérifier que la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge et calculer sa somme.

Concours d'entrée à CESI Ecole d'Ingénieurs

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée.

Sujet rédactionnel - 3h

page 3 sur 4

-
- 2.2. Énoncer le critère de d'Alembert pour une série à termes positifs $\sum_{n \geq 1} a_n$.
- 2.3. En déduire l'ensemble des x dans \mathbb{R} , tels que $\sum_{n \geq 1} nx^{n-1}$ converge puis montrer que $\sum_{n \geq 1} b_n$ converge.
- 2.4. Montrer que : $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \frac{3}{2}$.

Partie B

Soit n dans \mathbb{N} , on note : $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x))^n dx$.

- 2.5. Montrer que la suite $(W_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
- 2.6. Démontrer que pour n entier naturel : $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$.
- 2.7. En déduire une expression de W_{2n} et W_{2n+1} pour n entier naturel.
- 2.8. Montrer que pour n entier naturel : $W_{n+1} W_n = \frac{\pi}{2(n+1)}$.
- 2.9. Montrer que $W_{n+1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} W_n$ et que $W_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

3 Algèbre (10 points)

Partie A

On considère la matrice A dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -8 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

- 3.1. Déterminer le polynôme caractéristique de A .
- 3.2. Déterminer les valeurs propres de A . On précisera la multiplicité de chaque valeur propre.
- 3.3. Déterminer les sous-espaces propres de A .
- 3.4. La matrice A est-elle diagonalisable? Si oui, donner la matrice diagonale D associée à A et une matrice de passage P telle que : $D = P^{-1}AP$.

Concours d'entrée à CESI Ecole d'Ingénieurs

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée.

Sujet rédactionnel - 3h

page 4 sur 4

3.5. Résoudre le système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} x'(t) = 7x(t) + 2y(t) - 8z \\ y'(t) = 3y \\ z'(t) = 4x + 2y - 5z \end{cases}$$

où les fonctions x , y et z sont les inconnues à déterminer et les conditions initiales : $x(0) = -1$, $y(0) = -2$, et $z(0) = 1$.

Partie B

On se place dans l'espace $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ dont la base canonique notée $\mathcal{B}_c(e_1, e_2)$ correspond aux matrices coordonnées : $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soit la matrice A dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Soit les vecteurs X_1 et X_2 définis par :

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3.6. Montrer que la famille $\mathcal{B}(X_1, X_2)$ est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

3.7. Calculer AX_1 et AX_2 .

3.8. Déterminer la matrice de f une application linéaire canonique associée à A dans la base (B) .

3.9. Déterminer P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}_c , calculer P^{-1} , $P^{-1}AP$. Est-ce cohérent ?

..... FIN DU SUJET

À LIRE ATTENTIVEMENT AVANT DE COMMENCER

L'épreuve de Sciences Physiques pour l'Ingénieur dure 3 heures.
L'énoncé comporte 4 problèmes. Chaque candidat doit en réaliser 3, en fonction de la spécialité choisie à l'inscription.

Les candidats inscrits à la spécialité « **Généraliste** » (code candidat commençant par « G ») réaliseront :

- Le problème I : Montagnes russes à bille
- Le problème II : Accéléromètre MEMS
- Le problème IIIa : Casserole sur une plaque à induction

Les candidats inscrits à la spécialité « **Informatique** » (code candidat commençant par « I ») réaliseront :

- Le problème I : Montagnes russes à bille
- Le problème II : Accéléromètre MEMS
- Le problème IIIb : Réseau internet

T.S.V.P.

La composition s'effectue exclusivement sur les feuillets recto-verso mis à disposition. Utilisez bien les deux côtés du feuillet.

The image shows a scanned document page. At the top left, there is a header with fields for 'Nom', 'Prénom', 'Date' (format DD/MM/YY), and 'Code'. Below these fields is a small box containing the text 'Consigne pour l'identification : Remplir soigneusement la zone d'identification en MAJUSCULES avec un stylo foncé.' To the right of the fields is a logo for 'L'ÉCOLE D'INGÉNIEURS' and the word 'Epreuve :'. The main body of the page is a large, blank area with horizontal ruling lines, intended for the student's answers.

Renseignez clairement le cartouche de chaque feuillet avec vos nom, prénom, code candidat, ainsi que la date du jour de l'épreuve.

Le nom de l'épreuve est « Sciences Physiques »

Remplissez systématiquement la case de pagination en numérotant vos pages dans l'ordre :



- Numéro de page dans la partie supérieure gauche,
- Nombre total de pages dans la partie inférieure droite.

Le recto (côté du feuillet avec le cartouche) a un numéro de page impair, le verso (côté du feuillet sans cartouche) a un numéro de page pair.

Avant de rendre votre copie, rangez les différents feuillets dans l'ordre de pagination.

Dans le cas où vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le très lisiblement sur votre copie, proposez la correction et poursuivez l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

Les énoncés et les brouillons seront ramassés à la fin des épreuves pour être détruits.

Bon courage !

Epreuve de physique et d'informatique

Durée : 3H00

Calculatrice non graphique autorisée

CONSIGNES ET AVERTISSEMENTS :

- Ecrivez au **stylo à bille bleu ou noir** (pas d'encre effaçable)
- N'utilisez pas de correcteur blanc, mais rayez proprement
- Ecrivez *lisiblement*, avec une TAILLE DE CARACTÈRES raisonnable
- Numérotez chaque page sous forme : "numéro de page / nombre total de pages écrites"
- Ne rendez pas l'énoncé
- Respectez la numérotation des questions
- Faites les problèmes et les questions des problèmes dans l'**ordre**
- Laissez des espaces pour les questions non traitées
- **Encadrez** vos résultats

Le respect rigoureux de ces consignes sera pris en compte (environ 2 % de la note finale).

Ce sujet comporte 3 problèmes indépendants, comptant pour environ 33 % dans la notation finale. Il est recommandé d'accorder 1h pour travailler chaque problème. Attention, le problème III est différent pour les candidats de la filière générale et pour ceux de la filière informatique.

Problème I - Montagnes russes à bille

Il existe des modèles réduits de montagnes russes (roller coaster), utilisant une bille en acier, qui part d'une certaine hauteur et qui dévale une piste constituée de deux rails parallèles. Une succession de structures remarquables parsèment l'itinéraire. Dans ce problème, on va étudier le mouvement de cette bille, assimilée à un point matériel M de masse m , dans le référentiel terrestre galiléen. Tous les frottements (avec l'air, avec les rails, ...) sont négligés. On note g la norme de l'accélération locale de la pesanteur terrestre. Sauf mention contraire, on décrit le mouvement de M avec des coordonnées cartésiennes (x, y, z) . L'axe x , de vecteur directeur unitaire \vec{u}_x , est horizontal; l'axe z , de vecteur directeur unitaire \vec{u}_z , est vertical ascendant. A part pour le "Serpentin", le mouvement reste dans un plan à y fixé.

La première portion du circuit comprend une zone d'accélération du point A au point B.

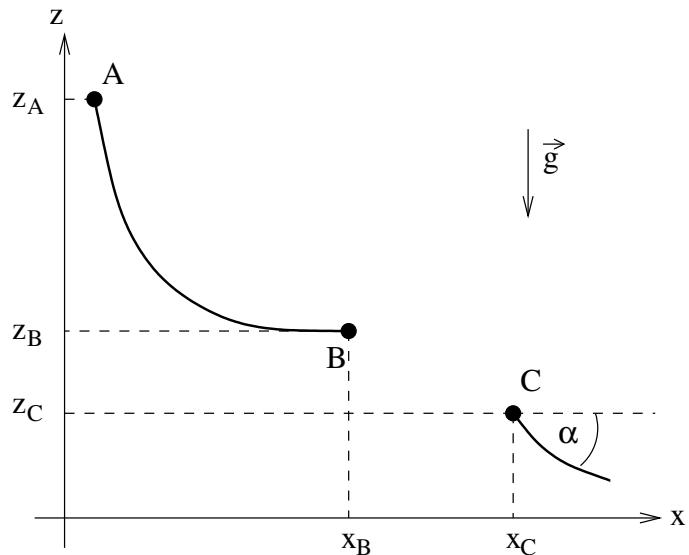


FIGURE 1 – Zone d'accélération, suivie du "Grand Saut".

1. La bille est lâchée sans vitesse initiale du point A. Etablir l'expression de la norme, v_B , de la vitesse de la bille au point B, en fonction de z_A , z_B et g

Du point B au point C a lieu le "Grand Saut". La bille quitte le point B avec une vitesse horizontale de norme v_B et doit arriver tangentielle à la piste au niveau du point C. En ce point, la piste fait un angle α avec l'horizontale (cf figure 1).

2. Déterminer les équations régissant les coordonnées $x(t)$ et $z(t)$ du point M.
3. En déduire les expressions de $x(t)$ et $z(t)$, en fonction de g , v_B , x_B , z_B et t . On choisit comme origine des temps l'instant où M est en B.
4. Ecrire les conditions pour que M arrive tangentielle à la piste au point C. On introduira τ l'instant où M arrive en C et v_C la norme de la vitesse de M en C. Aucune résolution n'est demandée.

De C à D, la piste descendante se redresse jusqu'à devenir horizontale en D. Puis la bille arrive sur une boucle, appelée "Looping". Cette boucle, de rayon ρ , est supposée être contenue dans un plan à y fixé, du point D au point E. La norme de la vitesse de la bille en D est notée v_D . Le mouvement de la bille dans le looping est étudié avec un système de coordonnées polaires (ρ, φ) , et la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi)$ associée (cf figure 2). On redéfinit l'origine des temps avec l'instant où la bille est en D.

5. Ecrire les équations du mouvement de la bille, issues des projections de la relation fondamentale de la dynamique ("PFD") selon les vecteurs \vec{u}_ρ et \vec{u}_φ . On notera $\vec{N} = N\vec{u}_\rho$ la réaction normale de la piste sur la bille.

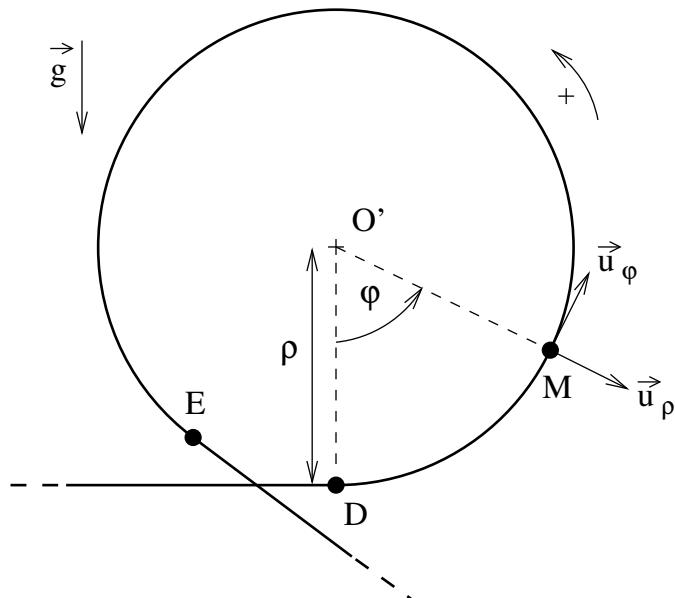


FIGURE 2 – Le "Looping".

6. En multipliant par $\dot{\varphi}$ l'équation de la direction orthoradiale, et en intégrant par rapport au temps, on arrive à :

$$\frac{1}{2}\rho\dot{\varphi}^2 = g \cos(\varphi) + K$$

Déterminer la constante K .

7. En déduire l'expression de N en fonction de φ , g , ρ et v_D .
 8. Etablir la condition sur v_D , afin que la bille ne quitte jamais la piste lors de son passage dans le Looping.

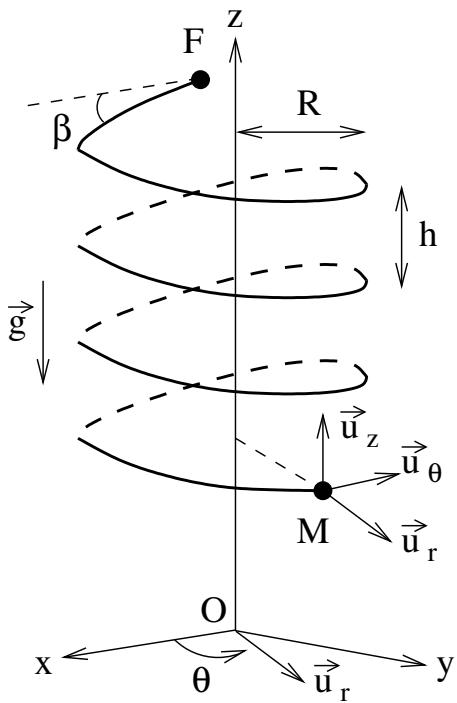


FIGURE 3 – Le "Serpentin".

De E à F, la piste est rectiligne, inclinée d'un angle β par rapport à l'horizontale. A partir du point F, le circuit aborde une portion hélicoïdale, appelée le "Serpentin". Le raccord de piste se fait de manière tangente, sans rupture de pente. Il s'agit d'une hélice d'axe Oz, de rayon R , de pas h (désigne la variation d'altitude de la bille lorsqu'elle fait un tour de l'hélice) et qui s'enroule dans le sens direct (vu du dessus de l'hélice). La piste de l'hélice est toujours inclinée par rapport au plan horizontal d'un angle β . Il existe une relation entre β , h et R :

$$h = 2\pi R \tan(\beta)$$

On se place dans le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) , avec la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ associée (cf figure 3). On redéfinit l'origine des temps avec l'instant où la bille est en F. On admet que les équations régissant les variables z et θ sont :

$$(R\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2 + 2gz = k \quad (1)$$

$$\dot{z} = -R\dot{\theta} \tan(\beta) \quad (2)$$

où k est une constante homogène à une énergie massique.

9. Indiquer pour chaque équation comment elle a été obtenue.

En combinant les deux égalités précédentes, et avec une formule trigonométrique, on aboutit à :

$$\frac{\dot{z}^2}{\sin^2(\beta)} + 2gz = k$$

Cette équation étant non linéaire, on utilise la méthode d'Euler pour trouver une solution approchée. Un programme, ci-dessous, a été écrit en Python 3, mais il manque des portions de code.

```
from math import pi, sin, cos, tan, atan, sqrt

g = 9.8      # m.s^(-2) ; accélération de la pesanteur
m = 1.0      # kg ; masse de la bille
h = 20e-2    # m : pas de l'hélice
R = 10e-2    # m ; rayon de l'hélice
dt = 1e-3    # s ; pas de discréttisation temporelle
z_ini = 30e-2 # m ; altitude du début du Serpentin
v_ini = 0.1   # m/s ; norme de vitesse initiale
z_fin = 0.1   # m ; altitude de fin du Serpentin

beta = atan(h / (2*pi*R))
z_prime_ini = -v_ini * sin(beta)

t = [0.0]
z = [z_ini]
z_prime = [z_prime_ini]

while XXX:          # à compléter
    z_prime.append(YYY)  # à compléter
    z.append(ZZZ)        # à compléter
    t.append(t[-1] + dt)
```

10. Ecrivez le code correspondant à XXX, YYY et ZZZ.

Problème II - Accéléromètre MEMS

Un smartphone dispose de nombreux capteurs, parmi lesquels un accéléromètre. Ce dispositif, de type Micro Electro Mechanical Systems (MEMS), tient sur une puce électronique. Il met en jeu des condensateurs montés en série dont certaines armatures sont solidaires d'un micro-oscillateur mécanique, qui lui-même se déplace en fonction du mouvement du smartphone. La variation de capacité des condensateurs est en lien avec ce déplacement, et donc avec l'accélération.

Dans un premier temps, on va déterminer la capacité d'un condensateur plan seul. Soit un plan infini uniformément chargé, avec une densité surfacique de charges σ , supposée strictement positive. La surface du plan est normale à l'axe x (cf figure 4).

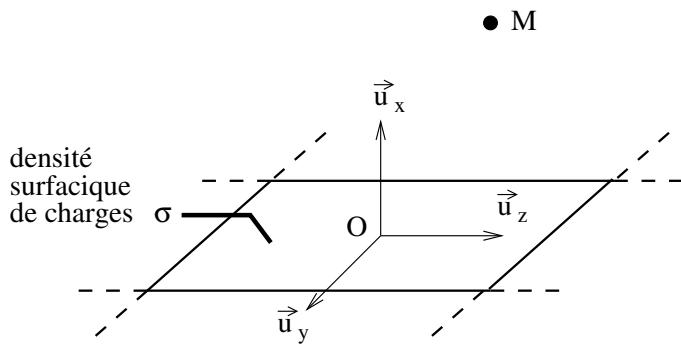


FIGURE 4 – Plan infini uniformément chargé.

- 11.** Etudiez les symétries et invariances de cette distribution de charges, pour en déduire des informations sur le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en un point M quelconque de l'espace. Justifiez également une relation entre $\vec{E}(x)$ et $\vec{E}(-x)$.

- 12.** En appliquant le théorème de Gauss, montrer que :

$$\vec{E}(x > 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x$$

où ϵ_0 est la permittivité électrique absolue du vide et \vec{u}_x un vecteur unitaire dans la direction x .

On suppose désormais qu'un autre plan, chargé uniformément en surface, de densité surfacique $-\sigma$, est placé parallèlement au premier plan, en $x = -d$. Cela définit le modèle du condensateur plan infini.

- 13.** En appliquant le principe de superposition, établir l'expression du champ électrostatique, noté $\vec{E}_{condo}(M)$, en tout point de l'espace.
- 14.** En déduire l'expression du potentiel électrostatique $V_{condo}(M)$ en tout point de l'espace. On posera $V_{condo}(x = -d) = 0$ et on admettra la continuité du potentiel de part et d'autre de chaque plan.

Dans toute la suite, on admettra que tous les résultats précédents, obtenus avec des plans infinis, sont valables avec des plans de taille finie. On considère maintenant des armatures de surface S finie.

- 15.** Montrer que la capacité C du condensateur vaut :

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

Maintenant, on considère un dispositif simplifié, représenté sur la figure 5, relatif à l'accéléromètre MEMS, constitué d'une partie fixe (par rapport au référentiel lié au smartphone), avec deux armatures conductrices planes de surface S , et d'une armature conductrice plane mobile, également de surface S , pouvant se déplacer dans la direction x . Lorsque $x = 0$, les armatures sont séparées d'une distance d . Les deux condensateurs ainsi formés sont électriquement en série, avec des capacités C_1 et C_2 respectives.

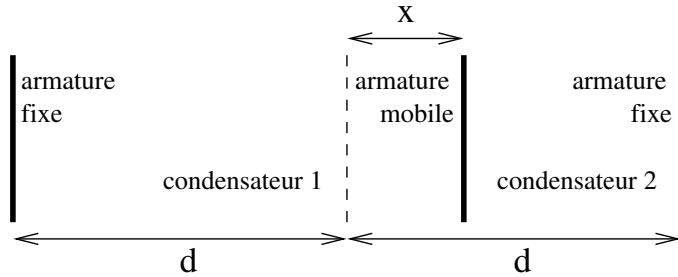


FIGURE 5 – Plan infini uniformément chargé.

- 16.** Calculez l'expression de $C' = C_1 + C_2$ et de $k = \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}$, en fonction de S , d , x et ε_0 . Veillez à simplifier au maximum les expressions.

L'ordre de grandeur des capacités à mesurer étant particulière, il est nécessaire d'utiliser une technique de mesure adaptée. Elle s'appuie sur un dispositif électronique, représenté figure 6. On admettra que tous les résultats précédents, obtenus en régime stationnaire, restent valables en régime variable. Les potentiels des différents points sont définis par rapport au potentiel du point O, pris nul (masse). Le point 1 a pour potentiel :

$$V_1 = \frac{V_M}{2} + \alpha \cos(\Omega t)$$

et le point 2 a pour potentiel :

$$V_2 = \frac{V_M}{2} - \alpha \cos(\Omega t)$$

avec α constante. Le point M est au potentiel constant V_M .

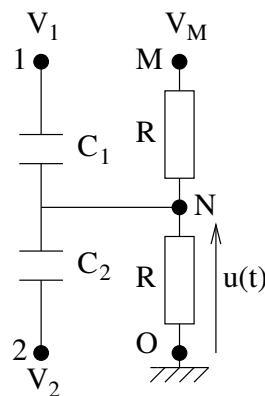


FIGURE 6 – Plan infini uniformément chargé.

- 17.** En appliquant la loi des noeuds en N, établir l'équation différentielle vérifiée par la tension $u(t)$. Introduire les notations C' , k et $\tau = \frac{1}{2}RC'$ dans votre écriture et la présenter sous la forme :

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = A \frac{d \cos(\Omega t)}{dt} + B \quad (3)$$

avec A et B constantes.

- 18.** Proposez l'expression de la solution pour le régime transitoire de cette équation différentielle, à une constante multiplicative près, qu'on ne cherchera pas à déterminer. A quelle condition cette solution est négligeable devant la solution du régime permanent ? Cette condition sera supposée vérifiée dans toute la suite.

- 19.** On ne s'intéresse désormais qu'à la solution en régime permanent. On la recherche sous la forme :

$$u(t) = U_1 \cos(\Omega t + \varphi) + U_2$$

L'équation (3) étant linéaire, déterminer U_2 seul en considérant l'équation réduite :

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = B$$

De même, en considérant l'équation réduite :

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = A \frac{d \cos(\Omega t)}{dt}$$

déterminer U_1 et φ seuls, en fonction de Ω , τ , k et α , en passant en notation complexe avec la convention :

$$\underline{u} = U_1 \exp(j(\Omega t + \varphi))$$

Simplifier l'expression complète de la solution en régime permanent, sachant que $\Omega\tau \gg 1$ en pratique.

- 20.** Un ultime traitement consiste à multiplier $u(t)$ par $\alpha \cos(\Omega t)$. Cette tension produit est notée $w(t)$. Puis on effectue un filtrage passe-bas adapté, afin de récupérer la valeur moyenne de $w(t)$ (utile pour l'accéléromètre). Comment se nomme ce procédé de traitement de signal ? Proposer un montage simple de filtre passe-bas, avec un schéma et une condition entre les valeurs des composants qui le constituent et la pulsation Ω . Aucun calcul n'est exigé.

Problème IIIa - Casserole sur une plaque à induction

ATTENTION, seuls les candidats de la FILIÈRE GÉNÉRALE doivent traiter ce problème.

L'objectif de ce problème est d'évaluer la durée pour faire passer une casserole d'eau liquide de 20°C à 99°C (juste avant l'ébullition), sous pression atmosphérique, grâce à un chauffage avec une plaque à induction. Données numériques :

- Masse volumique de l'eau liquide : $\rho = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$
- Capacité thermique massique de l'eau liquide à pression constante : $c_p = 4,2 \cdot 10^3 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$
- Rayon de la casserole remplie d'eau : $R_{cass} = 1,0 \cdot 10^{-1} \text{ m}$
- Hauteur de la casserole remplie d'eau : $H_{cass} = 2,0 \cdot 10^{-1} \text{ m}$

On modélise la plaque à induction sous la forme d'une spire circulaire, de centre O, de rayon R_{spire} , normal à l'axe Oz (cf figure 7). On veut étudier le champ magnétostatique créé en un point de l'axe Oz, lorsque la spire est parcourue par un courant constant I . L'étude est faite dans le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) , avec la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ associée.

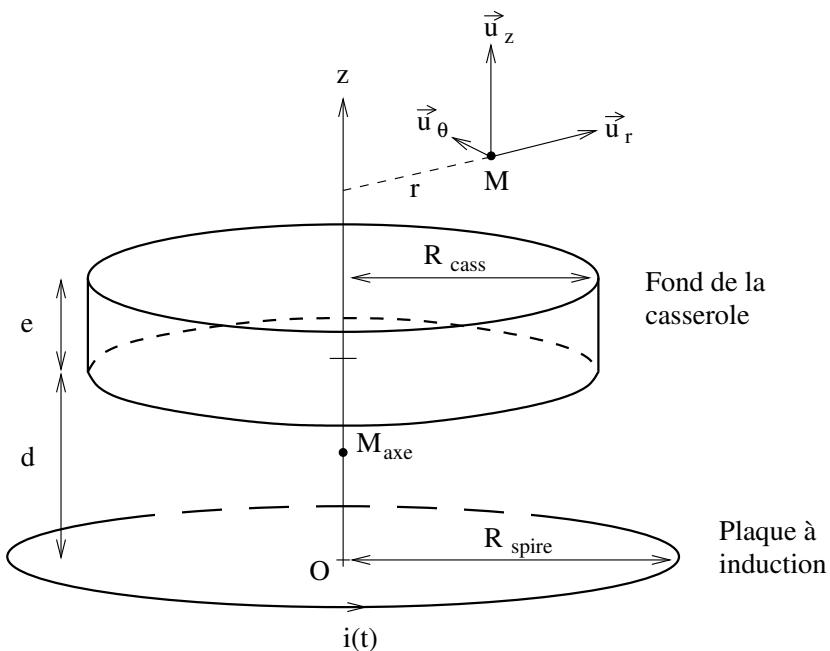


FIGURE 7 – Schéma de la plaque à induction et du fond de la casserole.

- Etudiez les symétries de la distribution de courant et en déduire des informations sur le champ magnétostatique en M_{axe} situé sur l'axe Oz.
- Par analyse dimensionnelle, établir l'expression de la norme du champ magnétique en O, noté B_0 , en fonction de μ_0 , R_{spire} et I ; vous rechercherez une expression sous forme de monôme :

$$B_0 = k \mu_0^\alpha R_{spire}^\beta I^\gamma$$

avec α , β et γ à trouver. Le facteur multiplicatif sans dimension k sera pris égal à 1/2. Indication : Plutôt que de rechercher la dimension de chaque grandeur, exploiter l'écriture du théorème d'Ampère, pour en déduire directement les exposants inconnus.

- On admet que la norme du champ magnétique en un point M_{axe} de l'axe Oz situé en z vaut :

$$\|\vec{B}_{axe}(z)\| = B_0 \sin^3(\varphi)$$

où φ est le demi-angle au sommet du cône formé par la spire et le point M_{axe} . Ecrire l'expression complète de \vec{B}_{axe} en fonction de B_0 , R_{spire} et z .

Dans la suite, le courant dans la spire est variable, mais en se plaçant dans le cadre de l'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires (ARQS), on admet que les résultats obtenus en magnétostatique restent valables, en remplaçant I par $i(t)$. On s'intéresse maintenant au fond de la casserole, modélisé par un cylindre conducteur, de rayon R_{cass} et d'épaisseur e . On admet que ce cylindre ressent en tout point le champ magnétique :

$$\vec{B}_{cass} = B_1 \cos(\omega t) \vec{u}_z$$

avec B_1 constante et ω pulsation.

- 24.** Ecrire et nommer l'équation de Maxwell qui justifie qu'un champ électrique \vec{E}_{cass} apparaît dans le fond de la casserole. Ecrire et nommer la forme intégrale de cette équation. Vous préciserez bien vos notations et les conventions retenues.

- 25.** On suppose que :

$$\vec{E}_{cass} = E_{cass}(r, t) \vec{u}_\theta$$

Déterminer $E_{cass}(r, t)$.

- 26.** On rappelle l'équation locale de Poynting :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \operatorname{div} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) = (-\vec{j} \cdot \vec{E})$$

Nommer chacun des termes entre parenthèses et préciser leur unité usuelle.

- 27.** Ecrire la formule de la loi d'Ohm locale, valable dans un conducteur ohmique. Puis, déterminer la puissance moyenne dissipée par effet Joule, P_J , dans le fond de la casserole. Exprimer le résultat en fonction de B_1 , ω , σ , R_{cass} et e . Rappel :

$$\langle \sin^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2}$$

De plus, le volume cylindrique élémentaire, dV , de hauteur e , compris entre les rayons r et $r + dr$ vaut $dV = 2\pi r dr \times e$.

Pour finir, on s'intéresse à l'échauffement de l'eau dans la casserole. On suppose qu'il y a un couvercle sur la casserole, de sorte qu'il n'y a aucun échange thermique avec l'air. De plus, les parois latérales de la casserole sont supposées athermanes. La puissance moyenne dissipée par effet Joule dans le fond de la casserole vaut $P_J = 2,5 \cdot 10^3$ W. La température de l'eau $T_{eau}(t)$ est supposée rester uniforme dans tout le volume d'eau. La pression reste constante, égale à la pression atmosphérique.

- 28.** Faire un bilan d'énergie pour l'eau dans la casserole, entre l'instant initial $t = 0$ où l'eau est à $T_f = 20^\circ\text{C}$ et l'instant $t = \tau$ où l'eau est à $T_c = 99^\circ\text{C}$. En déduire l'expression de τ .

- 29.** Faire l'application numérique.

- 30.** On suppose maintenant qu'il n'y a plus de couvercle sur la casserole. Le flux thermique entre la surface de l'eau et l'air extérieur (à $T_f = 20^\circ\text{C}$) est proportionnel à la surface eau/air et la différence entre la température de l'air et celle de l'eau ; le coefficient de proportionnalité est noté h . Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la température $T_{eau}(t)$ de l'eau. La résolution n'est pas demandée.

Problème IIIb - Réseau Internet

ATTENTION, seuls les candidats de la FILIÈRE INFORMATIQUE doivent traiter ce problème.

Tous les programmes demandés doivent être écrits en **Python 3**. Soyez rigoureux sur la présentation de votre code et sur le respect des règles syntaxiques ; exagérez les indentations pour bien les voir. Il est inutile de commenter les programmes ou les fonctions que vous concevez. Sur les exemples présentés, le symbole **>>>** désigne l'invite de commande de l'interpréteur Python. Enfin, cet énoncé précise les annotations de type pour les fonctions à concevoir. Par exemple :

```
ma_fonction(a: int, LL: list, test: bool) -> dict
```

indique que le paramètre **a** est de type entier, **LL** est de type liste, **test** est de type booléen et que la fonction **ma_fonction** renvoie un dictionnaire. Cependant, sur votre copie, vous n'écrirez pas ces annotations, mais juste **ma_fonction(a, LL, test)** pour l'entête de fonction.

Pour écrire les fonctions demandées en Python 3, il n'est pas permis de faire appel à des fonctions issues de modules importés. Seules les fonctions et commandes dites built-in ("natives" au langage) sont autorisées. On rappelle quelques fonctions / commandes utiles, que vous pouvez utiliser :

- La commande **split()** précédé d'une chaîne de caractères, permet de diviser la chaîne en une liste de sous-chaînes, en spécifiant un caractère de séparation. Par exemple :

```
>>> mot = "fraise|abricot|poire"  
>>> mot.split("|")  
['fraise', 'abricot', 'poire']
```

- La commande **isdigit()** précédé d'une chaîne de caractères, permet de vérifier si tous les caractères d'une chaîne de caractères sont des chiffres. Par exemple :

```
>>> "fraise123".isdigit()  
False
```

```
>>> "0123".isdigit()  
True
```

- La commande **int()** peut transformer une chaîne de caractères numériques en un entier. Par exemple :

```
>>> int("125")  
125  
>>> int("125.1") # le nombre dans la chaîne doit être un entier !  
ValueError  
>>> int("01") # élimine les zéro à gauche lors de la conversion  
1
```

```
>>> int("b12!")  
ValueError
```

- La commande **str()** peut transformer un entier en une chaîne de caractères numériques. Par exemple :

```
>>> str(125)  
"125"  
>>> str(01) # 01 n'est pas une écriture valide en Python pour un entier  
SyntaxError
```

Internet est un réseau mondial d'ordinateurs interconnectés qui a révolutionné notre manière de communiquer et d'accéder à l'information. Ce problème porte sur quelques aspects informatiques en rapport avec ce réseau.

Tout ordinateur connecté à Internet est identifié et localisé à l'aide d'une adresse IP (pour Internet Protocol) unique, analogue à une adresse postale pour un bâtiment. Dans la version 4 de ce protocole (qui va être progressivement abandonnée au profit d'une version supérieure), une adresse IP est une séquence binaire de 32 bits. Pour faciliter sa lecture ou son écriture par un humain, on la présente plutôt sous la forme de quatre entiers décimaux, compris entre 0 et 255, séparés par des points. Par exemple, l'adresse IP :

```
110000001010100000000010000001
```

est présentée pour les humains comme :

```
192.168.1.1
```

31. Expliquer pourquoi la présentation décimale avec quatre entiers compris entre 0 et 255 est compatible avec un nombre binaire de 32 bits. Combien y a-t-il exactement d'adresses IP possibles, dans la version 4 ? Commenter en comparant avec le nombre d'habitants sur Terre.
32. Ecrire une fonction `dec2byte(nombre: int) -> str` qui prend pour argument un nombre entier compris entre 0 et 255, et qui renvoie une chaîne de 8 caractères, formée de "0" et de "1", correspondant au nombre binaire associé. Par exemple :

```
>>> dec2byte(5)
'00000101'
>>> dec2byte(15)
'00001111'
```

On rappelle l'algorithme permettant de convertir un nombre décimal en nombre binaire ; il repose sur des divisions successives par 2 :

- (a) On divise le nombre décimal par 2 et on note le reste (0 ou 1)
- (b) On remplace le nombre décimal par le quotient de sa division par 2
- (c) On répète les étapes (a) et (b) jusqu'à ce que le quotient soit nul
- (d) L'écriture binaire du nombre décimal initial est la liste des restes successifs, écrite dans l'ordre inverse !

33. Ecrire une fonction `adresse_IP_valide(adresse: str) -> bool`, qui prend comme paramètre une chaîne de caractères et qui renvoie un booléen indiquant si cette chaîne correspond bien à une adresse IPv4 valide. Exemple :

```
>>> adresse_IP_valide("Bonjour !")
False
>>> adresse_IP_valide("12.12")
False
>>> adresse_IP_valide("10.450.1.26")    # 450 est supérieur à 255
False
>>> adresse_IP_valide("10.45.03.26")    # 03 n'est pas considéré
False                                         # comme un entier ; il faut écrire 3
>>> adresse_IP_valide("127.0.0.1")
True
```

La transmission d'information entre deux ordinateurs peut être perturbée par divers facteurs (perturbation électromagnétique, défaillance matérielle, micro-coupure électrique, ...) et il est nécessaire de tester la bonne intégrité des messages reçus. Une des techniques utilisées sur Internet est le "bit de parité". Elle consiste à ajouter un bit supplémentaire à une séquence binaire, pour s'assurer que le nombre total de bits valant 1 respecte la règle suivante : Le nombre total de 1 dans la séquence binaire (y compris le bit de parité) doit être pair. Par exemple, on veut transmettre :

- "1011", alors on ajoute un "1" et on transmettra "10111" ; on a ainsi un nombre total de "1" pair (4 en l'occurrence)
- "01110111", alors on ajoute un "0" et on transmettra "011101110" ; on a ainsi un nombre total de "1" pair (6 en l'occurrence)

34. Ecrire une fonction `bit_de_parite(sequence: str) -> str`, qui prend comme argument une chaîne de caractères, représentant une séquence binaire, constituée uniquement de "0" et de "1" et qui renvoie un caractère ("0" ou "1") correspondant au bit de parité de la séquence. Exemple :

```
>>> bit_de_parite("1011")
"1"
>>> bit_de_parite("01110111")
"0"
```

35. Ecrire une fonction `verif(sequence: str) -> bool`, qui prend comme argument une chaîne de caractères, représentant une séquence binaire (incluant son bit de parité), constituée uniquement de "0" et de "1" et qui renvoie un booléen indiquant si la séquence binaire n'a pas été corrompue (`True` indique que le test de parité est correct). Exemple :

```
>>> verif("10111")
True
>>> verif("011101111")
False
```

Le transport de données dans le réseau Internet met en jeu des algorithmes astucieux, mais complexes, pour trouver un chemin de connexion entre deux ordinateurs qui veulent communiquer, si possible le plus rapide (en terme de durée de transmission). On va ici étudier deux algorithmes simples pour tenter de résoudre ce problème. On se limite à un réseau-test sous la forme d'un graphe pondéré non orienté, dessiné figure 8, où chaque sommet désigne un ordinateur (repéré par une lettre) et où chaque liaison (bidirectionnelle) entre ordinateur est associée à une durée de transmission (nombre entier strictement positif) supposée connue. Le but est de trouver un chemin, si possible le plus rapide, entre l'ordinateur "A" et l'ordinateur "F".

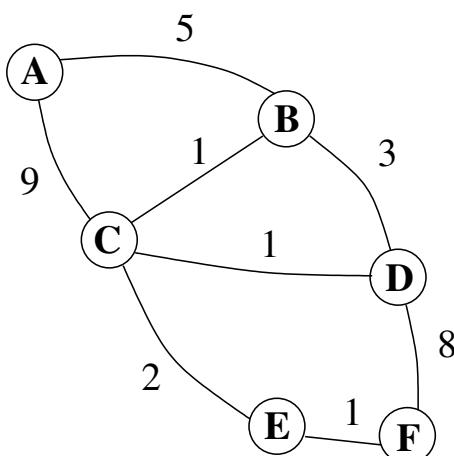


FIGURE 8 – Graphe du réseau-test.

Pour représenter informatiquement le graphe, on définit la liste des sommets du graphe, ainsi qu'un dictionnaire d'adjacence nommé **connexions** :

```
sommets = ["A", "B", "C", "D", "E", "F"]
connexions = {"A": [["B", 5], ["C", 9]],
              "B": [[["A", 5], ["C", 1], ["D", 3]],
                    ["C": [[["A", 9], ["B", 1], ["D", 1], ["E", 2]],
                           "D": [[["B", 3], ["C", 1], ["F", 8]],
                                 "E": [[["C", 2], ["F", 1]],
                                       "F": [[["D", 8], ["E", 1]]]}]
graphe = [sommets, connexions]
```

- 36.** On imagine dans un premier temps un algorithme "glouton" : On part du sommet "A" et on va au sommet voisin dont la transmission est la plus rapide (c'est-à-dire dont la durée de transmission est la plus petite). Puis on recommence le processus jusqu'à atteindre le sommet "F". On suppose qu'on remplit progressivement une liste **sommets_visités**, de façon à ne pas repasser par des sommets déjà visités. Ecrire la succession des sommets visités, lorsqu'on applique cet algorithme. D'après vous, quels sont ses atouts et ses défauts ?
- 37.** On vous propose maintenant un algorithme de type "parcours en profondeur". On fournit le code suivant :

```
def parcours(graphe, sommet_départ, sommet_fin):
    sommets, connexions = graphe
    chemins = {sommet_départ: [sommet_départ]}
    L = [sommet_départ]
    visités = []
    while len(L) != 0:
        sommet = L.pop()
        if sommet not in visités:
            visités.append(sommet)
            for (voisin, durée) in connexions[sommet]:
                L.append(voisin)
                chemins[voisin] = chemins[sommet] + [voisin]
                if voisin == sommet_fin:
                    return chemins[voisin]
```

Que renvoie la commande suivante :

```
>>> parcours(graphe, "A", "F")
```

D'après vous, quels sont ses atouts et ses défauts ?

Pour finir, on s'intéresse à une base de données relationnelle portant sur les clients des fournisseurs d'accès à Internet (FAI). Elle comprend 3 tables, dont les schémas relationnels sont :

- **CLIENTS** : IdClient (INT), Nom (STR), Prénom (STR), Département (INT)
- **FORFAITS** : IdForfait (INT), Désignation (STR), Opérateur (STR), Engagement (INT), Réseau (STR), PrixMensuel (INT)
- **ABONNEMENTS** : IdClient # (INT), IdForfait # (INT)

avec des extraits présentés ci-après.

Le soulignement d'un (ou plusieurs) attribut désigne la clé primaire de la table correspondante. Le symbole # désigne une clé étrangère. On admet qu'un client ne s'abonne qu'à un seul forfait. Un forfait avec un engagement (en nombre de mois) valant 0 correspond à un forfait sans engagement.

On indique ci-après les commandes SQL autorisées (à l'exclusion de toute autre) : **SELECT**, **DISTINCT**, **WHERE**, **LIMIT**, **OFFSET**, **JOIN .. ON ..**, **ORDER BY**, **DESC**, **GROUP BY**, **HAVING**, les fonctions d'agrégation **MIN()**, **MAX()** et **COUNT()**, les opérateurs mathématiques de comparaison **=**, **<**, **<=**, **>**, **>=**, les opérateurs logiques **AND**, **OR**, **NOT** et les opérateurs ensemblistes **UNION**, **INTERSECT** et **EXCEPT**.

<u>IdClient</u>	Nom	Prénom	Département
1	Doe	John	75
2	MacFly	Marie	34
3	Smith	Myriam	69
:	:	:	:

TABLE 1 – Table Clients

<u>IdForfait</u>	Désignation	Opérateur	Engagement	Réseau	PrixMensuel
1	Forfait Light	Orange	0	ADSL	20
2	Forfait Liberté	Free	12	Fibre	30
3	Forfait Puissance	Bouygues	12	Fibre	30
4	Forfait Space	Starlink	24	Satellite	50
:	:	:	:	:	:

TABLE 2 – Table Forfaits

<u>IdClient</u> #	<u>IdForfait</u> #
1	3
2	3
3	1
:	:

TABLE 3 – Table Abonnements

38. Ecrire une requête SQL qui affiche le prénom et le nom des clients de tous les FAI, situés dans le département ayant le numéro 75 (Paris). Exemple d'affichage renvoyé :

Aline	Dugenou
Sarah	Machin
Phil	Dutronc
:	:

39. Ecrire une requête SQL qui affiche la désignation des forfaits, avec le nom de l'opérateur associé, dont le réseau est de type "Fibre", et le prix Mensuel est compris entre 20 et 40 euros (valeurs incluses). L'affichage doit être trié dans l'ordre alphabétique du nom des opérateurs. Exemple d'affichage renvoyé :

Forfait Puissance	Bouygues
Forfait Liberté	Free
Forfait Liberté +	Free
:	:

40. Ecrire une requête SQL qui affiche la désignation du forfait et le prix mensuel pour le client dont le prénom est "Hubert" et le nom est "Johnson". Exemple d'affichage renvoyé :

Forfait Liberté	30
-----------------	----

41. Ecrire une requête SQL qui affiche le nombre de clients de chaque opérateur , ainsi que le nom de l'opérateur, pour les clients qui sont situés dans le département numéro 60 (Oise). Exemple d'affichage renvoyé :

25004	Orange
34104	Free
27890	SFR
:	:

Concours d'entrée en formation d'ingénieur



EPREUVE DE FRANÇAIS

Version A – 10 avril 2025

Durée : 45 minutes

Cette épreuve comporte 40 questions. Elle débute par un texte, auquel sont reliées les questions 1 à 15, portant sur la compréhension de ce texte.

Les questions 16 à 40 sont des questions générales de vocabulaire, orthographe, grammaire et syntaxe, sans rapport avec le texte.

L'épreuve est un Questionnaire à Choix Unique (QCU). Les questions sont toutes indépendantes les unes des autres. Pour chaque question, 4 réponses sont proposées. Une et une seule réponse est correcte. Vous devez **reporter vos réponses sur la grille fournie uniquement**, en cochant ou noircissant la case de votre réponse. Utilisez un stylo bleu ou noir.

Le barème est le suivant :

- 1 point par bonne réponse
- 0 point si aucune case n'est cochée ou si la réponse est mauvaise

Ne perdez pas de temps sur une question. Si vous butez plus de 1 ou 2 minutes, passez à la suivante. Vous reviendrez à cette question plus tard en fonction du temps qu'il vous reste.

En cas de raturage, préférez demander une nouvelle grille aux surveillants, ce qui évitera toute erreur dans la correction.

Pour cette épreuve, aucun document n'est autorisé. Aucun appareil électronique (téléphone, smartphone, ipad, ordinateur, etc) n'est autorisé.

Les énoncés et les brouillons sont ramassés à la fin des épreuves pour être détruits.

Grille réponse

Remplissez soigneusement l'en-tête de la grille réponse.

Code dossier

Nom

Prénom

Centre



Pour répondre aux questions, merci de cocher la case de votre choix de la manière suivante :

Date / /

EPREUVE DE FRANCAIS

Sélectionnez votre questionnaire A B

- Veuillez aligner vos informations à gauche, en commençant dès la première case. Écrivez clairement, en lettres d'imprimerie, sans dépasser du cadre.
- Le **code dossier** est constitué du code à 6 caractères figurant sur votre étiquette de table (1 lettre + 5 chiffres)
- Le **centre** est la ville de votre lieu d'examen.
- La **date** est celle du jour des épreuves.
- Laissez vides les cases « A » et « B » qui n'ont pas d'utilité ici.

« ENCADRER LE DEVELOPPEMENT DE L'INTELLIGENCE ARTIFICIELLE POUR FAVORISER UNE INNOVATION RESPONSABLE » - Propos recueillis en novembre 2024 par les Techniques de l'Ingénieur

Charbel-Raphaël Segerie, directeur exécutif du Centre pour la Sécurité de l'Intelligence Artificielle (CeSIA), explique ici quels sont les différents types de risques liés au développement des nouveaux modèles d'intelligence artificielle, dans un contexte de course effrénée pour développer des modèles d'IA de plus en plus puissants.

« Notre mission première est de partager des outils et des connaissances en matière de sécurité de l'IA à usage général, notamment en évaluant la qualité de la supervision de l'IA. Nous essayons de voir s'il est possible, avec les techniques actuelles, d'avoir un contrôle automatique sur les IA. À ces fins, nous sommes en train d'établir un benchmark, qui permettra d'évaluer la qualité du contrôle et de la supervision sur les IA. Nous participons également à la rédaction du code des bonnes pratiques de l'IA au niveau de l'Union Européenne.

Le règlement européen sur l'intelligence artificielle, adopté cet été, doit veiller à ce que les systèmes d'IA mis sur le marché respectent les droits humains et les législations en vigueur. Le texte interdit certaines pratiques d'IA jugées à haut risque. Maintenant, l'enjeu consiste à opérationnaliser ce règlement pour les IA à usage général. Pour les modèles d'IA qui ont été entraînés avec une grande quantité de calculs, le RIA préconise la mise en place d'une importante batterie de tests, mais ces derniers ne sont pour le moment pas définis. Notre ambition est donc de participer à la rédaction de ces codes de bonnes pratiques qui permettront d'évaluer la sécurisation des IA.

Nous pensons qu'il existe de nombreux risques liés à l'IA, existants et émergents. Nous avons mis en place une taxonomie en trois niveaux : les risques liés aux usages malveillants, aux problèmes d'alignement, et les risques systémiques. L'IA va devenir de plus en plus capable. En particulier, les IA générales peuvent être utilisées pour des cyberattaques. Par exemple Google a annoncé récemment disposer de systèmes capables de découvrir des zero-day, des nouveaux types de vulnérabilité, qui peuvent être utilisés pour mener des cyberattaques.

Certaines IA peuvent être utilisées pour le bioterrorisme. On pense que les IA pourraient permettre dans le futur de créer des pandémies artificielles. Il est aujourd'hui très facile d'envoyer des séquences de protéines à des laboratoires qui les synthétisent sans être trop regardants. Des IA ont déjà été utilisées pour augmenter le niveau de dangerosité de certaines molécules.

Les armes autonomes constituent aussi un risque à bien mesurer. Pour quelques milliers d'euros aujourd'hui, vous pouvez acheter des robots équipés d'armes ainsi que des drones, qui représentent un danger potentiel en cas d'usages malveillants, en particulier si on leur permet de fonctionner de manière autonome grâce à une IA.

Moins spectaculaire, tout un chacun peut faire face à des problèmes de vie privée et de confidentialité. Par exemple, peu de gens se rendent compte qu'en copiant collant leurs mails dans ChatGPT pour les améliorer, OpenAI est en capacité de récupérer l'entièreté de ces données. Il est quand même aberrant de se dire que via ces procédés, OpenAI récupère chaque jour une quantité non négligeable de données extrêmement privées voire sensibles.

La notion d'alignement des IA mérite d'être expliquée pour en comprendre les conséquences. L'alignement d'une IA est sa capacité à réaliser ce qu'on lui demande. Aujourd'hui les IA sont des outils. Dans l'avenir, une partie des IA seront des agents autonomes, auxquels on fixera un objectif. Actuellement en phase d'émergence, ces agents autonomes sont beaucoup plus puissants que les IA classiques, car ils peuvent accéder à internet ou aux ordinateurs sur lesquels ils sont installés. On se rapproche d'IA capables de réaliser tout ce qu'un humain peut réaliser avec un ordinateur ou avec internet. Un exemple illustrant parfaitement ce qu'est un problème d'alignement concerne l'IA Tay de Microsoft, un chatbot lancé sur Twitter. Celui-ci a très rapidement trouvé un moyen pour maximiser l'engagement de ses followers, en adoptant un comportement misogyne, raciste, nazi... Ainsi, face à l'objectif donné à une IA autonome, celle-ci met en place des stratégies pour maximiser ses performances. Ce faisant, elle peut trouver des stratégies non conformes aux valeurs humaines pour parvenir à ses fins.

Il faut bien avoir à l'esprit que les IA ne sont pas des logiciels comme les autres. Ce sont des amas d'algorithmes illisibles, des boîtes noires, qui utilisent des milliards de paramètres n'ayant pas de sens à eux seuls mais qui, pondérés et combinés d'une certaine façon, vont permettre de maximiser un objectif, sans que l'on puisse vraiment comprendre comment. C'est aussi cela qui explique le comportement parfois surprenant des IA.

Nous assistons aujourd'hui à une course acharnée, menée par les entreprises privées et les États, qui essaient de créer les IA les plus puissantes possible, ouvrant la porte aux risques que nous venons d'évoquer. Une grande partie des plus éminents chercheurs en IA vont même jusqu'à affirmer que cette montée en puissance de l'IA représente un risque existentiel pour l'humanité.

Nous pensons qu'avec toutes les incertitudes qui règnent autour des évolutions à venir en termes d'IA, il est important de définir des lignes rouges à ne pas franchir.

Prenons quelques exemples. Des IA capables de mener des cyberattaques de manière complètement autonome constituerait une menace qu'il faut absolument proscrire. Des IA qui permettraient d'augmenter significativement les risques de pandémies constituent une autre ligne rouge. Une IA capable de s'auto répliquer constituerait également un danger critique, puisque cela lui permettrait de se répliquer elle-même un nombre indéfini de fois, au risque de devenir totalement incontrôlable.

Face à ces risques potentiels, des mécanismes adoptés par de nombreuses grandes entreprises investissant l'IA vont dans le bon sens. Ces mécanismes évaluent le niveau des modèles d'IA sur quatre grands types de capacités : les cyberattaques, l'autonomie, la création de biorisque, et les capacités de manipulation et persuasion. Cela permet d'établir pour ces quatre capacités des niveaux de risques, et in fine de ne pas déployer les modèles d'IA présentant un risque trop élevé sur l'une d'entre elles, avant d'avoir trouvé les méthodes pour contrôler cet aléa.

Le problème est qu'actuellement, les mécanismes de mise à l'échelle responsable de l'IA sont volontaires et pas imposés aux entreprises. Tout l'enjeu est donc de faire en sorte que ces mécanismes deviennent réglementaires. C'est ce qui est en train d'être réalisé au niveau européen, avec la difficulté de définir correctement les lignes rouges, et de mettre en place les procédures en séparant les éléments absolument indispensables à prendre en compte de ceux qui sont moins importants... Ce travail comprend d'immenses difficultés techniques, l'évaluation des risques étant un travail extrêmement complexe. ».

Questions liées au texte :

1	<p>Choisissez la réponse qui reflète le mieux le sens du texte :</p> <ul style="list-style-type: none">a. Beaucoup de gens utilisent des IA sans le savoir.b. Beaucoup de gens apprécient les IA car elles facilitent certaines tâches difficiles.c. Beaucoup de gens utilisent des IA sans mesurer les conséquences.d. Beaucoup de gens ont peur des IA mais ne savent pas vraiment pourquoi.
2	<p>Choisissez la réponse qui reflète le mieux le sens du texte :</p> <p>Le CeSIA est :</p> <ul style="list-style-type: none">a. Un laboratoire développant de nouvelles molécules grâce à l'intelligence artificielle.b. Une entreprise développement des logiciels de cybersécurité.c. Un organisme de surveillance du développement d'outils d'intelligence artificielle.d. Une filiale de CESI dédiée à la recherche sur l'intelligence artificielle.
3	<p>Choisissez la réponse par rapport au contenu du texte :</p> <p>Quel terme parmi les suivants n'est pas employé dans le texte ?</p> <ul style="list-style-type: none">a. énervantb. éminentc. émergentd. existentiel
4	<p>Choisissez la réponse qui reflète le mieux le sens du texte :</p> <p>Parmi les propositions suivantes, laquelle a le sens le plus proche de « course effrénée » ?</p> <ul style="list-style-type: none">a. C'est un combat sans issue.b. L'évolution n'est pas maîtrisée.c. Le plus rapide écrasera tous les autres.d. Aucun obstacle ne vient ralentir les participants.

5	<p>Choisissez la réponse qui reflète le mieux le sens du texte :</p> <ul style="list-style-type: none"> a. L'intelligence artificielle est trop dangereuse, il faut éviter de l'utiliser. b. L'intelligence artificielle présente beaucoup de risques contre lesquels des moyens de protection sont en cours d'élaboration. c. L'intelligence artificielle présente des risques qui disparaîtront progressivement de manière automatique. d. L'intelligence artificielle évolue sans que les états ne se soucient des risques.
6	<p>Choisissez la réponse qui reflète le mieux le sens du texte :</p> <p>Parmi les utilisations malveillantes de l'IA, quelle est celle qui n'est pas évoquée dans le texte ?</p> <ul style="list-style-type: none"> a. La guerre. b. Le terrorisme. c. L'intrusion dans la vie privée. d. La manipulation de l'information.
7	<p>Choisissez la réponse qui reflète le mieux le sens du texte :</p> <p>Parmi les affirmations suivantes au sujet des IA autonomes, quelle est celle qui est fausse ?</p> <ul style="list-style-type: none"> a. Les IA autonomes existent déjà. b. Les IA autonomes peuvent produire des résultats inattendus. c. Les IA autonomes doivent être interdites. d. Les IA autonomes ne s'appuient pas sur des valeurs morales.
8	<p>Choisissez la réponse par rapport au contenu du texte :</p> <p>Quel verbe n'a pas un sens proche du verbe « proscrire » ?</p> <ul style="list-style-type: none"> a. interdire b. inhiber c. condamner d. bannir

9	<p>Choisissez la réponse par rapport au contenu du texte :</p> <p>Quel verbe n'a pas un sens proche du verbe « répliquer » ?</p> <ul style="list-style-type: none"> a. réparer b. cloner c. répondre d. reproduire
10	<p>Choisissez la réponse qui reflète le mieux le sens du texte :</p> <p>Parmi les propositions suivantes, quelle est celle qui ne figure pas dans les critères pris en considération par les entreprises pour contrôler les modèles d'intelligence artificielle ?</p> <ul style="list-style-type: none"> a. Capacité d'utilisation pour des cyberattaques b. Degré d'autonomie c. Accès libre au code programme d. Capacité à influencer l'opinion
11	<p>Choisissez la réponse qui reflète le mieux le sens du texte :</p> <p>Parmi les propositions suivantes, quelle est celle qui ne correspond pas aux dispositions prévues au RIA ?</p> <ul style="list-style-type: none"> a. Toute IA doit être validée par des tests de sécurisation. b. Toute IA doit faire l'objet d'une mesure de sa sobriété énergétique. c. Aucune IA ne peut enfreindre les réglementations en vigueur. d. Aucune IA ne peut faire l'apologie du racisme.
12	<p>Choisissez la réponse par rapport au contenu du texte :</p> <p>Dans les propositions suivantes, quel nom n'a pas un sens proche de « taxonomie » ?</p> <ul style="list-style-type: none"> a. rangement b. classement c. méthode d. activité

13	<p>Choisissez la réponse par rapport au contenu du texte :</p> <p>Quelle proposition est vraie ?</p> <ul style="list-style-type: none"> a. ChatGPT et OpenAI sont des intelligences artificielles. b. ChatGPT et OpenAI sont des entreprises du domaine de l'IA. c. ChatGPT est une IA et OpenAI est une entreprise. d. ChatGPT est une entreprise et OpenAI est une IA.
14	<p>Choisissez la réponse qui reflète le mieux le sens du texte :</p> <ul style="list-style-type: none"> a. Il existe un organisme international qui va réguler le domaine de l'intelligence artificielle. b. Le contrôle des intelligences artificielles se met en place, mais n'est pas encore opérationnel. c. Face aux entreprises privées qui développent des IA, les états sont dans l'incapacité d'instaurer des contrôles de ces IA. d. Le développement de l'intelligence artificielle doit être stoppé, car l'IA présente plus de risques que de bienfaits.
15	<p>Choisissez la réponse par rapport au contenu du texte :</p> <p>Quelle est la signification de l'adjectif « éminent » dans la phrase « <i>Une grande partie des plus éminents chercheurs en IA</i> » ?</p> <ul style="list-style-type: none"> a. récent b. connu c. riche d. réputé

Questions générales

16	<p>Compléter la phrase suivante : « La maison semblait_____ .»</p> <ul style="list-style-type: none">a. inhabitéb. inhabitéec. inhabittéd. inhabittée
17	<p>Quelle forme verbale est mal orthographiée ?</p> <ul style="list-style-type: none">a. je sensb. je mentsc. je prendsd. je tends
18	<p>Trouvez le mot n'ayant pas un sens proche du mot « estimer »</p> <ul style="list-style-type: none">a. évaluerb. considérerc. construired. apprécier
19	<p>Compléter la phrase suivante : « _____ sa réputation, nous attendions un meilleur résultat de lui ! »</p> <ul style="list-style-type: none">a. Étant donnéb. Étant donnéec. Étant donnésd. Étant donner

20	<p>Compléter la phrase suivante : « Il ne viendra plus _____ »</p> <ul style="list-style-type: none"> a. déshormés b. désormés c. déshormais d. désormais
21	<p>Quel est le mot mal orthographié ?</p> <ul style="list-style-type: none"> a. planning b. plannification c. bonhomme d. bonhomie
22	<p>Compléter la phrase suivante : « Dans mon rôle de directrice, tu peux imaginer les pensées qui m'ont _____ »</p> <ul style="list-style-type: none"> a. traverser b. traversé c. traversée d. traversées
23	<p>Quelle est le mot correctement orthographié ?</p> <ul style="list-style-type: none"> a. agissements b. aggression c. agassant d. agittation
24	<p>Quelle est le mot correctement accentué ?</p> <ul style="list-style-type: none"> a. haltère b. aïgu c. concrêt d. propriété

25	<p>Compléter la phrase suivante : « Elles ont eu une amende pour avoir _____ le feu. »</p> <ul style="list-style-type: none"> a. griller b. grillées c. grillè. d. grillé
26	<p>Quelle est la phrase correcte ?</p> <ul style="list-style-type: none"> a. Les pizzas auxquels j'ai goûté étaient très mauvaises ! b. Les pizzas que j'ai goûtées étaient très épicées ! c. La pizza que j'ai mangé était très ordinaire ! d. Les pizzas qu'on nous a proposé ne nous ont pas beaucoup plus !
27	<p>Quelle est la phrase correcte ?</p> <ul style="list-style-type: none"> a. Je me souviens de toutes mes erreurs. b. Je me rappelle de toutes mes erreurs. c. Les erreurs dont je me rappelle m'ont beaucoup servi. d. Les erreurs que je me souviens m'ont beaucoup servi.
28	<p>Quel nom est bien orthographié ?</p> <ul style="list-style-type: none"> a. Un diagnostique b. Un diaguenostic c. Un diagnostik d. Un diagnostic
29	<p>Trouvez le mot n'ayant pas un sens proche du mot « propriété » :</p> <ul style="list-style-type: none"> a. qualité b. essence c. attribut d. acte

30	<p>Trouvez le mot n'ayant pas un sens proche du mot « ambitieux » :</p> <ul style="list-style-type: none"> a. osé b. hardi c. orgueilleux d. aisé
31	<p>Quelle forme verbale est mal orthographiée ?</p> <ul style="list-style-type: none"> a. il puait b. ils puaient c. ils purrent d. il put
32	<p>Quel est le mot bien orthographié ?</p> <ul style="list-style-type: none"> a. chlorophile b. choralle c. chorizzo d. cholestérol
33	<p>Complétez la phrase suivante : « L'architecte calcule l' _____ du toit» ?</p> <ul style="list-style-type: none"> a. inclinaison b. inclination c. inclinement d. inclinage
34	<p>Quel est le mot bien orthographié ?</p> <ul style="list-style-type: none"> a. atirrail b. attiraille c. attirail d. attirraille

35	<p>Complétez la phrase suivante : « J'écris cette lettre _____ Monsieur Dupont »</p> <ul style="list-style-type: none"> a. à l'intention de b. à l'intention pour c. à l'attention de d. à l'attention pour
36	<p>Quelle est la phrase correcte ?</p> <ul style="list-style-type: none"> a. Étant stagiaire, mon directeur m'a beaucoup aidé. b. Étant stagiaire, j'ai beaucoup apprécié les conseils de mon directeur. c. Étant stagiaire, tous les conseils me sont utiles. d. Étant stagiaire, veuillez agréer, Monsieur, mes sincères salutations.
37	<p>Quelle est la phrase correcte ?</p> <ul style="list-style-type: none"> a. Après qu'il a dit ces mots, il partit. b. Après qu'il ait dit ces mots, il partit. c. Après qu'il eût dit ces mots, il partit. d. Après qu'ils eussent dit ces mots, ils partirent.
38	<p>Trouvez le mot n'ayant pas un sens proche du mot « altruiste » :</p> <ul style="list-style-type: none"> a. charitable b. philanthrope c. généreux d. empathique
39	<p>Compléter la phrase suivante : « Face à cette situation _____, il sut garder la tête froide. »</p> <ul style="list-style-type: none"> a. patétique b. pathétique c. patéthique d. pathéthique

40	<p>Trouvez le mot ayant un sens proche du mot « digression » :</p> <ul style="list-style-type: none">a. divagationb. habitudec. moralitéd. originalité
----	--

Concours d'entrée en formation d'ingénieur



EPREUVE D'ANGLAIS

10 avril 2025

Durée : 45 minutes

L'épreuve est un Questionnaire à Choix Unique (QCU). Les questions sont toutes indépendantes les unes des autres. Pour chaque question, 4 réponses sont proposées. Une et une seule réponse est correcte. Vous devez **reporter vos réponses sur la grille fournie uniquement**, en cochant ou noircissant la case de votre réponse. Utilisez un stylo bleu ou noir.

Le barème est le suivant :

- 1 point par bonne réponse
- 0 point si aucune case n'est cochée ou si la réponse est mauvaise

Ne perdez pas de temps sur une question. Si vous butez plus de 1 ou 2 minutes, passez à la suivante. Vous reviendrez à cette question plus tard en fonction du temps qu'il vous reste.

En cas de raturage, préférez demander une nouvelle grille aux surveillants, ce qui évitera toute erreur dans la correction.

Pour cette épreuve, aucun document n'est autorisé. Aucun appareil électronique (téléphone, smartphone, ipad, ordinateur, etc) n'est autorisé.

Les énoncés et les brouillons sont ramassés à la fin des épreuves pour être détruits.

Grille réponse

Remplissez soigneusement l'en-tête de la grille réponse.

Code dossier

Nom

Prénom

Centre



Pour répondre aux questions, merci de cocher la case de votre choix de la manière suivante :

Date / /

EPREUVE D'ANGLAIS

Sélectionnez votre questionnaire A B

- Veuillez aligner vos informations à gauche, en commençant dès la première case. Écrivez clairement, en lettres d'imprimerie, sans dépasser du cadre.
- Le **code dossier** est constitué du code à 6 caractères figurant sur votre étiquette de table (1 lettre + 5 chiffres)
- Le **centre** est la ville de votre lieu d'examen.
- La **date** est celle du jour des épreuves.
- Laissez vides les cases « A » et « B » qui n'ont pas d'utilité ici.

Questions 1 to 20 : Choose the one word or phrase that best completes the sentence :

1	<p>Answering telephone calls is the of an operator.</p> <p>a) responsible b) responsibly c) responsive d) responsibility</p>
2	<p>A free watch will be provided with every purchase of \$20.00 or more for a period of time.</p> <p>a) limit b) limits c) limited d) limiting</p>
3	<p>The president of the corporation has arrived in Copenhagen and will meet with the Minister of Trade on Monday morning.</p> <p>a) still b) yet c) already d) soon</p>
4	<p>Because we value your business, we have for card members like you to receive one thousand dollars of complimentary life insurance.</p> <p>a) arrange b) arranged c) arranges d) arranging</p>
5	<p>Employees are that due to the new government regulations, there is to be no smoking in the factory.</p> <p>a) reminded b) respected c) remembered d) reacted</p>

6	<p>Ms. Galera gave a long in honor of the retiring vice-president.</p> <p>a) speak b) speaker c) speaking d) speech</p>
7	<p>Any person who is in volunteering his or her time for the campaign should send this office a letter of intent.</p> <p>a) interest b) interested c) interesting d) interestingly</p>
8	<p>Mr. Gonzales was very concerned the upcoming board of directors meeting.</p> <p>a) to b) about c) at d) upon</p>
9	<p>The customers were told that no could be made on weekend nights because the restaurant was too busy.</p> <p>a) delays b) cuisines c) reservations d) violations</p>
10	<p>The sales representative's presentation was difficult to understand he spoke very quickly.</p> <p>a) although b) so that c) than d) because</p>

11	<p>It has been predicted that an weak dollar will stimulate tourism in the United States.</p> <ul style="list-style-type: none"> a) increased b) increasingly c) increases d) increase
12	<p>The firm is not liable for damage resulting from circumstances its control.</p> <ul style="list-style-type: none"> a) beyond b) above c) inside d) around
13	<p>Because of weather conditions, California has an advantage in the production of fruits and vegetables.</p> <ul style="list-style-type: none"> a) favorite b) favor c) favorable d) favorably
14	<p>On international shipments, all duties and taxes are paid by the</p> <ul style="list-style-type: none"> a) recipient b) receiving c) receipt d) receptive
15	<p>Although the textbook gives a definitive answer, wise managers will look for own creative solutions.</p> <ul style="list-style-type: none"> a) them b) their c) theirs d) they

16	<p>Initial regarding the merger of the companies took place yesterday at the Plaza Conference Center.</p> <ul style="list-style-type: none"> a) negotiations b) dedications c) propositions d) announcements
17	<p>Please photocopies of all relevant documents to this office ten days prior to your performance review date.</p> <ul style="list-style-type: none"> a) emerge b) substantiate c) adapt d) submit
18	<p>The auditor's results for the five-year period under study were the accountant's.</p> <ul style="list-style-type: none"> a) same b) same as c) the same d) the same as
19	<p>..... has the marketing environment been more complex and subject to change.</p> <ul style="list-style-type: none"> a) Totally b) Negatively c) Decidedly d) Rarely
20	<p>All full-time staff are eligible to participate in the revised health plan, which becomes effective the first day the month.</p> <ul style="list-style-type: none"> a) of b) to c) from d) for

Questions 21 to 40 : Find the underlined word or phrase which is incorrect :

21	<p>The Pinebrook Inn <u>has</u> a courtesy bus <u>which runs every</u> thirty minutes both <u>to from</u> the downtown area.</p> <p>a) has b) which runs c) every d) to from</p>
22	<p>We <u>appreciate</u> your <u>interest in</u> our company and <u>look forward to</u> hearing <u>about</u> you soon.</p> <p>a) appreciate b) interest in c) look forward to d) about</p>
23	<p>In the event <u>for</u> any changes need <u>to be made</u> in the <u>document</u>, please call our office <u>immediately</u>.</p> <p>a) for b) to be made c) document d) immediately</p>
24	<p><u>Each</u> banking transaction <u>were handled</u> quickly and <u>efficiently by</u> well-trained tellers.</p> <p>a) Each b) were handled c) efficiently d) by</p>
25	<p>We recommend that you follow the <u>formatted shown</u> in this sample when <u>preparing</u> announcements to be <u>displayed</u> on the bulletin board.</p> <p>a) formatted b) shown c) preparing d) displayed</p>

26	<p>Bennett International <u>has decided</u> to expand <u>its borrowing</u> to make up <u>with</u> a decline <u>in</u> investment returns.</p> <ul style="list-style-type: none"> a) has decided b) its borrowing c) with d) in
27	<p>Ms. Rivera <u>is going</u> to write <u>to manager</u> to complain <u>about</u> the poor service she received during <u>her stay</u> at the hotel.</p> <ul style="list-style-type: none"> a) is going b) to manager c) about d) her stay
28	<p><u>One proposal</u> suggests <u>relocating</u> the central offices <u>at</u> the suburbs to obtain <u>needed</u> space.</p> <ul style="list-style-type: none"> a) One proposal b) relocating c) at d) needed space
29	<p>Consumers are usually willing to buy <u>more</u> of an item <u>as</u> its price falls <u>because of</u> they want <u>to save</u> money.</p> <ul style="list-style-type: none"> a) more b) as c) because of d) to save
30	<p>Substantial penalties <u>will be charging</u> whenever <u>a</u> customer withdraws <u>funds</u> from this account <u>prior to</u> the maturity date.</p> <ul style="list-style-type: none"> a) will be charging b) a c) funds d) prior to

31	<p>We have <u>taken</u> special <u>caring</u> to see that the merchandise <u>has been packed</u> <u>according</u> to your instructions.</p> <ul style="list-style-type: none"> a) taken b) caring c) has been d) according
32	<p><u>For a list</u> of books <u>available</u> through the library system, <u>consultation</u> the computer terminal <u>near</u> the reference desk.</p> <ul style="list-style-type: none"> a) For a list b) available c) consultation d) near
33	<p>Mr. Webber <u>was taken</u> by surprise when he <u>was been told</u> the building he <u>was working</u> on had a severe <u>structural flaw</u>.</p> <ul style="list-style-type: none"> a) was taken by surprise b) was been told c) was working d) structural flaw
34	<p><u>At</u> our company meeting, the marketing analyst <u>reported that</u> we have too <u>many</u> sales representatives <u>into</u> Europe these days.</p> <ul style="list-style-type: none"> a) At b) reported that c) many d) into
35	<p>All passengers <u>must present</u> their boarding passes <u>to</u> the <u>designate</u> agent <u>at</u> the airport gate.</p> <ul style="list-style-type: none"> a) must present b) to c) designate d) at

36	<p><u>Without</u> we receive a definite commitment <u>by</u> the end of the month, we will be forced to reconsider <u>our</u> original proposal.</p> <ul style="list-style-type: none"> a) Without b) by c) to reconsider d) our
37	<p>The governor's panel of experts <u>reported that</u> supervisors should <u>continue</u> to review <u>safety standard</u> on <u>a regular</u> basis.</p> <ul style="list-style-type: none"> a) reported that b) continue c) safety standard d) a regular
38	<p>For <u>each</u> workshop, you <u>must register</u> and pay <u>prior to</u> the date on which the conference <u>begin</u>.</p> <ul style="list-style-type: none"> a) each b) must register c) prior to d) begin
39	<p>Francesca Rosati <u>is perfect</u> candidate <u>for the</u> position <u>because of her</u> experience in <u>administration</u>.</p> <ul style="list-style-type: none"> a) is perfect b) for the c) because of her d) administration
40	<p><u>Travel club</u> application forms <u>can find in front of</u> the main desk in the <u>hotel lobby</u>.</p> <ul style="list-style-type: none"> a) Travel club b) can find c) in front of d) hotel lobby



Concours d'entrée ingénieur généraliste et
ingénieur informatique

Candidats des classes préparatoires aux
grandes écoles inscrits au concours
communs du SCEI

Annales 2025 - Corrigés

Concours d'entrée à CESI Ecole d'Ingénieurs

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée.

Sujet rédactionnel - 3h

page 1 sur 10

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

1 Suites de probabilités (14 points)

On considère trois points distincts du plan nommés A , B et C . Nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points.

À l'étape initiale ($n = 0$), on suppose que le pion se trouve sur le point A . Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

- le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n + 1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n , plus précisément il ne dépend pas des positions occupées aux autres étapes précédentes ;
- pour passer de l'étape n à l'étape $n + 1$, on suppose que le pion a deux chances sur trois de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout n dans \mathbb{N} , on note :

- A_n : l'évènement « le pion se trouve en A à l'étape n » ;
- B_n : l'évènement « le pion se trouve en B à l'étape n » ;
- C_n : l'évènement « le pion se trouve en C à l'étape n ».

On note p_n (respectivement q_n et r_n) la probabilité de la réalisation de A_n (resp. B_n et C_n). et

$$V_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}.$$

Partie A

On considère la matrice M dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$M = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.1. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2^{n-1}} & 1 - \frac{1}{2^n} & 1 - \frac{1}{2^n} \\ 1 - \frac{1}{2^n} & 1 + \frac{1}{2^{n-1}} & 1 - \frac{1}{2^n} \\ 1 - \frac{1}{2^n} & 1 - \frac{1}{2^n} & 1 + \frac{1}{2^{n-1}} \end{pmatrix}.$$

Élément(s) de solution :

Ici, on peut effectuer une récurrence sur l'entier naturel n pour valider l'expression de M^n .

Si le lecteur préfère, il est aussi possible de détailler la diagonalisation comme suit.

On cherche les valeurs propres associées à M . On obtient via le polynôme caractéristique : $\lambda = 1$ de multiplicité 1 et $\lambda = 0.5$ de multiplicité 2

On cherche les espaces propres associés $E_1 = \text{vect}(1; 1; 1)$ et $E_2 = \text{vect}((-1; 0; 1); (-1; 1; 0))$

Concours d'entrée à CESI Ecole d'Ingénieurs

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée.

Sujet rédactionnel - 3h

page 2 sur 10

Puisque la dimension de chaque sous-espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre associée, la matrice M est diagonalisable.
On a donc D la matrice diagonale telle que

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

On peut désormais calculer M^n comme $M^n = PD^nP^{-1}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2^{n-1}} & 1 - \frac{1}{2^n} & 1 - \frac{1}{2^n} \\ 1 - \frac{1}{2^n} & 1 + \frac{1}{2^{n-1}} & 1 - \frac{1}{2^n} \\ 1 - \frac{1}{2^n} & 1 - \frac{1}{2^n} & 1 + \frac{1}{2^{n-1}} \end{pmatrix}.$$

- 1.2. Donner p_0 , q_0 et r_0 puis calculer p_1 , q_1 et r_1 .

Élément(s) de solution :

L'énoncé nous dit que $p_0 = 1$ tandis que $q_0 = r_0 = 0$. Après une étape, on a :

$$p_1 = \frac{1}{3}, \quad q_1 = \frac{1}{6}, \quad r_1 = \frac{1}{6}.$$

La somme $p_1 + q_1 + r_1$ vaut 1.

- 1.3. Démontrer que pour tout n dans \mathbb{N} , on a la relation : $V_{n+1} = MV_n$.

Élément(s) de solution :

Les événements A_n , B_n , C_n constituent un système complet d'événements. La formule des probabilités totales donne :

$$p_{n+1} = \mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_{n+1}|A_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}|B_n)\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}|C_n)\mathbb{P}(C_n).$$

En utilisant les probabilités conditionnelles, on obtient :

$$p_{n+1} = \frac{4}{6}p_n + \frac{1}{6}q_n + \frac{1}{6}r_n = \frac{1}{6}(4p_n + q_n + r_n).$$

Avec la même méthode, on démontre que :

$$q_{n+1} = \frac{1}{6}(p_n + 4q_n + r_n), \quad r_{n+1} = \frac{1}{6}(p_n + q_n + 4r_n).$$

Ceci signifie exactement que :

$$V_{n+1} = MV_n,$$

$$\text{où } V_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}.$$

- 1.4. En déduire que $V_n = M^nV_0$, puis une expression de p_n , q_n et r_n pour tout n dans \mathbb{N} .

Élément(s) de solution :

La formule $V_n = M^nV_0$ se démontre par récurrence (immédiate). Puisque M^n est donné par l'énoncé, et tenant compte de V_0 calculé à la première question, on a :

$$p_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\right), \quad q_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right), \quad r_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

Leur somme fait 1 (vérification)

- 1.5. Déterminer les limites respectives de chacun des termes généraux p_n , q_n et r_n quand n tend vers l'infini. Interpréter le résultat.

Élément(s) de solution :

On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 1/3 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = 1/3 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 1/3.$$

- 1.6. Après avoir vérifié que pour tout n entier naturel non nul :

$$p_{n+1} - q_{n+1} = \frac{1}{2}(p_n - q_n) \quad \text{et} \quad p_{n+1} - r_{n+1} = \frac{1}{2}(p_n - r_n)$$

Concours d'entrée à CESI Ecole d'Ingénieurs

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée.

Sujet rédactionnel - 3h

page 3 sur 10

retrouver le résultat précédent.

Élément(s) de solution :

On a

$$p_{n+1} = \frac{4}{6} p_n + \frac{1}{6} q_n + \frac{1}{6} r_n = \frac{1}{6}(4p_n + q_n + r_n).$$

Avec la même méthode, on démontre que :

$$q_{n+1} = \frac{1}{6}(p_n + 4q_n + r_n), \quad r_{n+1} = \frac{1}{6}(p_n + q_n + 4r_n).$$

et $p_n + q_n + r_n = 1$ alors $p_{n+1} - q_{n+1} = \frac{1}{2}(p_n - q_n)$ et $p_{n+1} - r_{n+1} = \frac{1}{2}(p_n - r_n)$ par simple combinaison.

Via une sous-suite géométrique de raison 0.5, on retrouve les expressions des suites (p_n) , (q_n) et (r_n) donc les résultats sont cohérents

Partie B

Pour n dans \mathbb{N}^* , on note a_n le nombre moyen de passages du pion en A entre l'étape 1 et l'étape n , et on définit la variable aléatoire :

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si } A_n \text{ est réalisé,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1.7. Interpréter la variable aléatoire $X_1 + \dots + X_n$ et l'espérance $\mathbb{E}(X_1 + \dots + X_n)$.

Élément(s) de solution :

L'état stable de la marche aléatoire est l'état où les probabilités d'être sur chacun des sommets sont égales.

La variable aléatoire $X_1 + \dots + X_n$ compte le nombre de fois où le pion passe en A entre l'étape 1 et l'étape n . $\mathbb{E}(X_1 + \dots + X_n)$ représente donc le nombre moyen de passages en A entre l'étape 1 et l'étape n . Ainsi :

$$\mathbb{E}(X_1 + \dots + X_n) = p_n.$$

1.8. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X_n pour n dans \mathbb{N}^* , et en déduire une expression de a_n .

Élément(s) de solution :

On a :

$$\mathbb{E}(X_i) = 1 \cdot \mathbb{P}(A_i) + 0 \cdot \mathbb{P}(\overline{A_i}) = p_i.$$

Par linéarité de l'espérance, on en déduit que :

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{i=1}^n p_i \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2^{i-1}}\right). \end{aligned}$$

On simplifie :

$$a_n = \frac{n}{3} + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}.$$

La somme géométrique donne :

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}.$$

Ainsi :

$$a_n = \frac{n}{3} + \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

2 Analyse (16 points)

Partie A

Concours d'entrée à CESI Ecole d'Ingénieurs

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée.

Sujet rédactionnel - 3h

page 4 sur 10

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. Pour tout n dans \mathbb{N}^* , on pose :

$$\begin{aligned} b_n &= n(a_n - a_{n+1}) \\ A_n &= \sum_{k=1}^n a_k \\ B_n &= \sum_{k=1}^n b_k. \end{aligned}$$

On prend, pour tout n entier naturel non nul : $a_n = \frac{1}{3^{n-1}}$.

2.1. Vérifier que la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge et calculer sa somme.

Élément(s) de solution :

On a $a_n = \frac{1}{3^{n-1}}$, donc la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ est une série géométrique de raison $r = \frac{1}{3}$ et de premier terme $a_1 = 1$. La somme de la série géométrique est donnée par :

$$\sum_{n \geq 1} a_n = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

Ainsi, la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge et sa somme vaut $\frac{3}{2}$.

2.2. Énoncer le critère de d'Alembert pour une série à termes positifs $\sum_{n \geq 1} a_n$.

Élément(s) de solution :

Le critère de d'Alembert affirme que si la suite des termes (a_n) d'une série $\sum_{n \geq 1} a_n$ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_n > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L,$$

alors :

- Si $L < 1$, la série converge.
- Si $L > 1$, la série diverge.
- Si $L = 1$ par valeur supérieure, la série diverge.
- Si $L = 1$ par valeur inférieure, le critère ne permet pas de conclure.

2.3. En déduire l'ensemble des x dans \mathbb{R} , tels que $\sum_{n \geq 1} nx^{n-1}$ converge puis montrer que $\sum_{n \geq 1} b_n$ converge.

Élément(s) de solution :

Pour $\sum_{n \geq 1} nx^{n-1}$, les termes sont $a_n = nx^{n-1}$. On applique le critère de d'Alembert à $|a_n|$ (absolue convergence) :

$$\begin{aligned} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{(n+1)|x|^n}{n|x|^{n-1}} \\ &= \frac{n+1}{n} \cdot |x|. \end{aligned}$$

Quand $n \rightarrow +\infty$, on a : $\frac{n+1}{n} \rightarrow 1$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |x|.$$

La série converge si et seulement si $|x| < 1$. Ainsi, l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que la série converge est $] -1; 1 [$.

Pour montrer que $\sum_{n \geq 1} b_n$ converge, on observe que $b_n = n(a_n - a_{n+1})$. Lorsque $a_n = \frac{1}{3^{n-1}}$, on trouve $a_{n+1} = \frac{1}{3^n}$, donc :

$$b_n = n \left(\frac{1}{3^{n-1}} - \frac{1}{3^n} \right) = n \cdot \frac{2}{3^n}.$$

On applique le critère de d'Alembert à b_n :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1) \cdot \frac{2}{3^{n+1}}}{n \cdot \frac{2}{3^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{3^n}{3^{n+1}} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Donc la série de terme général converge.

Concours d'entrée à CESI Ecole d'Ingénieurs

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée.

Sujet rédactionnel - 3h

page 5 sur 10

2.4. Montrer que : $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \frac{3}{2}$.

Élément(s) de solution :

On sait que $b_n = n(a_n - a_{n+1})$. La somme de la série $\sum_{n \geq 1} b_n$ peut être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} b_n &= \sum_{n=1}^{+\infty} n(a_n - a_{n+1}) \\&= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_{n+1} \\&= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n - \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_{n+1} \\&= a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n \\&= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\end{aligned}$$

Ainsi, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \frac{3}{2}$.

Partie B

Soit n dans \mathbb{N} , on note : $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x))^n dx$.

2.5. Montrer que la suite $(W_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

Élément(s) de solution :

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$W_{n+1} - W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{n+1}(t) - \cos^n(t)) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) (\cos(t) - 1) dt \leq 0,$$

puisque pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \cos(t) \leq 1$, donc $\cos^n(t) \cdot (\cos(t) - 1) \leq 0$.

La suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante.

2.6. Démontrer que pour n entier naturel : $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$.

Élément(s) de solution :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par intégration par parties, les fonctions $t \mapsto \sin(t)$ et $t \mapsto \cos^{n+1}(t)$ étant de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a :

$$\begin{aligned}W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \cdot \cos^{n+1}(t) dt \\&= [\sin(t) \cos^{n+1}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \cdot (n+1)(-\sin(t) \cos^n(t)) dt.\end{aligned}$$

En simplifiant :

$$W_{n+2} = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) \cos^2(t) dt.$$

On utilise $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t)$:

$$\begin{aligned}W_{n+2} &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) \cdot (1 - \cos^2(t)) dt \\&= (n+1)W_n - (n+1)IW_{n+2}.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n,$$

puis :

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

2.7. En déduire une expression de W_{2n} et W_{2n+1} pour n entier naturel.

Élément(s) de solution :

De la relation de récurrence de la question 4, on obtient, pour $p \in \mathbb{N}$:

$$W_{2p} = \frac{2p-1}{2p} W_{2p-2} = \frac{(2p-1)(2p-3)}{(2p)(2p-2)} W_{2p-4} = \frac{(2p-1)(2p-3)(2p-5)}{(2p)(2p-2)(2p-4)} W_{2p-6} = \dots$$

Ainsi :

$$W_{2p} = \frac{(2p-1) \times (2p-3) \times \dots \times 1}{(2p) \times (2p-2) \times \dots \times 2} W_0.$$

Concours d'entrée à CESI Ecole d'Ingénieurs

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée.

Sujet rédactionnel - 3h

page 6 sur 10

On peut réécrire cette expression comme :

$$W_{2p} = \frac{[(2p-1) \times (2p-3) \times \cdots \times 1] \times [(2p) \times (2p-2) \times \cdots \times 2]}{[(2p) \times (2p-2) \times \cdots \times 2]^2} \times \frac{\pi}{2}.$$

On obtient finalement :

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{(2p(p!)^2)} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{4^p(p!)^2} \times \frac{\pi}{2}.$$

De même, pour W_{2p+1} :

$$W_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} W_{2p-1} = \frac{(2p)(2p-2)}{(2p+1)(2p-1)} W_{2p-3} = \frac{(2p)(2p-2)(2p-4)}{(2p+1)(2p-1)(2p-3)} W_{2p-5} = \cdots$$

Ainsi :

$$W_{2p+1} = \frac{(2p) \times (2p-2) \times \cdots \times 2}{(2p+1) \times (2p-1) \times \cdots \times 3} W_1.$$

En simplifiant, on obtient :

$$W_{2p+1} = \frac{[(2p) \times (2p-2) \times \cdots \times 2]^2}{[(2p+1) \times (2p-1) \times \cdots \times 3] \times [(2p) \times (2p-2) \times \cdots \times 2]} = \frac{4^p(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

2.8. Montrer que pour n entier naturel : $W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2(n+1)}$.

Élément(s) de solution :

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $J_n = (n+1)W_nW_{n+1}$. On a :

$$J_{n+1} - J_n = (n+2)W_{n+1}W_{n+2} - (n+1)W_nW_{n+1}.$$

En développant :

$$J_{n+1} - J_n = (n+1)W_{n+1}W_n - (n+1)W_nW_{n+1} = 0.$$

Ainsi, $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante, de valeur W_0 . On a donc $W_0 = W_0W_1 = \frac{\pi}{2}$.

2.9. Montrer que $W_{n+1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} W_n$ et que $W_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Élément(s) de solution :

On sait que $W_{n+1} \sim \frac{W_n}{n}$, donc $J_n \sim \frac{nW_n^2}{n}$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \frac{\pi}{2}$. Ainsi,

$$nW_n^2 \sim \frac{\pi}{2}.$$

Finalement, on en déduit que $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = 0$.

3 Algèbre (10 points)

Partie A

On considère la matrice A dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -8 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

3.1. Déterminer le polynôme caractéristique de A .

Élément(s) de solution :

Le polynôme caractéristique de A est donné par :

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 7-\lambda & 2 & -8 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 4 & 2 & -5-\lambda \end{pmatrix}$$

Calculons ce déterminant :

$$\chi_A(\lambda) = (3-\lambda) \det \begin{pmatrix} 7-\lambda & -8 \\ 4 & -5-\lambda \end{pmatrix}$$

Concours d'entrée à CESI Ecole d'Ingénieurs

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée.

Sujet rédactionnel - 3h

page 7 sur 10

Le déterminant de la matrice 2×2 donne :

$$\det \begin{pmatrix} 7-\lambda & -8 \\ 4 & -5-\lambda \end{pmatrix} = (7-\lambda)(-5-\lambda) - (-8)(4) = (\lambda^2 - 2\lambda - 3)$$

Ainsi, le polynôme caractéristique devient :

$$\chi_A(\lambda) = (3-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = (3-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-3)$$

$$\chi_A(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda-3)^2$$

3.2. Déterminer les valeurs propres de A . On précisera la multiplicité de chaque valeur propre.

Élément(s) de solution :

Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique. Nous avons :

$$\lambda_1 = -1 \quad (\text{de multiplicité 1}) \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 3 \quad (\text{de multiplicité 2}).$$

3.3. Déterminer les sous-espaces propres de A .

Élément(s) de solution :

Pour $\lambda = -1$

On résout $A\mathbf{v} = -\mathbf{v}$, soit $(A + I)\mathbf{v} = 0$. Cela donne le système suivant :

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & -8 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

La solution est :

$$y = 0, \quad z = x$$

Le sous-espace propre associé à $\lambda = -1$ est de dimension 1. Un vecteur propre associé est :

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $\lambda = 3$

On résout $A\mathbf{v} = 3\mathbf{v}$, soit $(A - 3I)\mathbf{v} = 0$. Cela donne le système :

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

La solution est :

$$2x + y - 4z = 0$$

Ce qui donne les deux vecteurs propres suivants :

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le sous-espace propre associé à $\lambda = 3$ est de dimension 2.

3.4. La matrice A est-elle diagonalisable? Si oui, donner la matrice diagonale D associée à A et une matrice de passage P telle que : $D = P^{-1}AP$.

Élément(s) de solution :

Puisque la dimension de chaque sous-espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre associée, la matrice A est diagonalisable.

La matrice diagonale associée à A est :

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage P , formée par les vecteurs propres de A , est :

Concours d'entrée à CESI Ecole d'Ingénieurs

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée.

Sujet rédactionnel - 3h

page 8 sur 10

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.5. Résoudre le système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} x'(t) = 7x(t) + 2y(t) - 8z \\ y'(t) = 3y \\ z'(t) = 4x + 2y - 5z \end{cases}$$

où les fonctions x , y et z sont les inconnues à déterminer et les conditions initiales : $x(0) = -1$, $y(0) = -2$, et $z(0) = 1$.

Élément(s) de solution :

On pose $\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. L'écriture matricielle du système est alors :

$$\mathbf{X}'(t) = A\mathbf{X}(t)$$

Puisque $A = PDP^{-1}$, on peut multiplier l'équation $\mathbf{X}'(t) = A\mathbf{X}(t)$ par P^{-1} pour obtenir :

$$P^{-1}\mathbf{X}'(t) = DP^{-1}\mathbf{X}(t)$$

En posant $\mathbf{U}(t) = P^{-1}\mathbf{X}(t)$, on obtient :

$$\mathbf{U}'(t) = D\mathbf{U}(t)$$

Ce qui donne le système suivant :

$$\begin{cases} u'(t) = -u(t) \\ v'(t) = 3v(t) \\ w'(t) = 3w(t) \end{cases}$$

Les solutions de ce système sont :

$$\begin{cases} u(t) = C_1 e^{-t} \\ v(t) = C_2 e^{3t} \\ w(t) = C_3 e^{3t} \end{cases}$$

Donc :

$$\mathbf{U}(t) = \begin{pmatrix} C_1 e^{-t} \\ C_2 e^{3t} \\ C_3 e^{3t} \end{pmatrix}$$

En revenant à $\mathbf{X}(t)$, on a :

$$\mathbf{X}(t) = P\mathbf{U}(t)$$

Ce qui donne :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} \\ -2C_2 e^{3t} + 4C_3 e^{3t} \\ C_1 e^{-t} + C_3 e^{3t} \end{pmatrix}$$

En utilisant les conditions initiales $x(0) = -1$, $y(0) = -2$, et $z(0) = 1$, on résout le système :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = -1 \\ -C_2 + 2C_3 = -1 \\ C_1 + C_3 = 1 \end{cases}$$

Cela donne :

$$C_1 = 4, \quad C_2 = -5, \quad C_3 = -3$$

Ainsi, la solution du système est :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4e^{-t} - 5e^{3t} \\ 10e^{3t} - 12e^{3t} \\ 4e^{-t} - 3e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Concours d'entrée à CESI Ecole d'Ingénieurs

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée.

Sujet rédactionnel - 3h

page 9 sur 10

Partie B

On se place dans l'espace $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ dont la base canonique notée $\mathcal{B}_c(e_1, e_2)$ correspond aux matrices coordonnées : $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soit la matrice A dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Soit les vecteurs X_1 et X_2 définis par :

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3.1. Montrer que la famille $\mathcal{B}(X_1, X_2)$ est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Élément(s) de solution :

$\mathcal{B} = (X_1, X_2)$ est une famille de deux vecteurs non colinéaires, donc elle est libre. De plus, elle est de cardinal $2 = \dim \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) < +\infty$, donc il s'agit d'une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

3.2. Calculer AX_1 et AX_2 .

Élément(s) de solution :

On a :

$$AX_1 = \begin{pmatrix} 0 \times (-1) + 3 \times 1 \\ 1 \times (-1) + (-2) \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix};$$

$$AX_2 = \begin{pmatrix} 0 \times 3 + 3 \times 1 \\ 1 \times 3 + (-2) \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix};$$

si bien que

$$AX_1 = -3X_1 \quad \text{et} \quad AX_2 = X_2.$$

3.3. Déterminer la matrice de f une application linéaire canonique associée à A dans la base (B) .

Élément(s) de solution :

Puisque $AX_1 = -3X_1$ et $AX_2 = X_2$, on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.4. Déterminer P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}_c , calculer P^{-1} , $P^{-1}AP$. Est-ce cohérent ?

Élément(s) de solution :

Notons \mathcal{B}_c la base canonique. Soit P la matrice de passage de la base canonique à \mathcal{B} .

(a) On a (remarquons qu'obtenir les coordonnées d'un vecteur dans la base canonique est trivial) :

$$\text{Coord}_{\mathcal{B}_c}(X_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{Coord}_{\mathcal{B}_c}(X_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donc

$$P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_c} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Calculons P^{-1} . Pour $((x, y), (a, b)) \in (\mathbb{K}^2)^2$, on a :

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x + 3y = a \\ x + y = b \end{cases} \iff \begin{cases} -x + 3y = a \\ 4y = a + b \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b \\ y = \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b \end{cases}.$$

Donc P est inversible (on le savait) et

$$P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En posant le calcul $P^{-1}AP$, on trouve :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Concours d'entrée à CESI Ecole d'Ingénieurs

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée.

Sujet rédactionnel - 3h

page 10 sur 10

Ceci est cohérent car, par changement de base pour les endomorphismes (c'est-à-dire avec à chaque fois la même base au départ et à l'arrivée), et puisque $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_c}$ (matrice de changement de base « de l'ancienne à la nouvelle base »), on a (formule : $\mathbf{A}' = P^{-1}AP$, avec $\mathbf{A} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, $\mathbf{A}' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$, et $P = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$) :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P^{-1}\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f)P,$$

ce qui correspond.

..... FIN DU SUJET

**Corrigé
de l'épreuve de physique
et d'informatique**

Problème I - Montagnes russes à bille

1. La bille M n'est soumise qu'au poids et à la réaction normale de la piste, qui sont des forces conservatives et il n'y a pas de forces de frottement. Donc l'énergie mécanique de la bille se conserve. Donc :

$$E_{m,A} = E_{m,B} \Rightarrow 0 + mgz_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgz_B \Rightarrow v_B = \sqrt{2g(z_A - z_B)}$$

2. Appliquons le PFD à la bille de masse m , dans le référentiel terrestre galiléen, soumise uniquement au poids \vec{P} :

$$m\vec{a} = \vec{P}$$

En projetant dans les directions x et z , on obtient :

$$\ddot{x} = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{z} = -g$$

3. Les conditions initiales (CI) sont :

$$\dot{x}(t=0) = v_B \quad \dot{z}(t=0) = 0 \quad x(t=0) = x_B \quad z(t=0) = z_B$$

En intégrant 2 fois par rapport au temps les équations de la question 2, et en exploitant les CI, on trouve :

$$x(t) = v_B t + x_B \quad \text{et} \quad z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + z_B$$

4. A l'instant τ , M est au point C et sa vitesse est tangente à la piste, qui fait un angle α avec l'horizontale, d'où les conditions à respecter :

$$x(\tau) = x_C \quad z(\tau) = z_C \quad \dot{x}(\tau) = v_C \cos(\alpha) \quad \dot{z}(\tau) = -v_C \sin(\alpha)$$

5. Dans le référentiel terrestre galiléen, la bille est soumise au poids et à la réaction normale de la piste :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N}$$

En projection selon le vecteur radial \vec{u}_ρ , on obtient :

$$-m\rho\dot{\varphi}^2 = N + mg \cos(\varphi)$$

En projection selon le vecteur orthoradial \vec{u}_φ , on obtient :

$$m\rho\ddot{\varphi} = -mg \sin(\varphi)$$

6. A l'instant initial, où M est en D avec la vitesse orthoradiale de norme $\vec{v} = +v_D \vec{u}_\varphi = \rho\dot{\varphi}(t=0) \vec{u}_\varphi$, on a les conditions initiales :

$$\varphi(t=0) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{\varphi}(t=0) = \frac{v_D}{\rho}$$

D'où la constante K :

$$K = \frac{v_D^2}{2\rho} - g$$

7. En exploitant le PFD en projection radiale, et avec les résultats précédents, on trouve que :

$$N = -3mg \cos(\varphi) - 2mk = -3mg \cos(\varphi) + 2mg - m \frac{v_D^2}{\rho}$$

8. Pour que la bille ne quitte jamais la piste lors de son passage dans le Looping, la réaction normale ne doit jamais s'annuler. Initialement, $N < 0$ (la bille étant au dessus du rail), donc il faut que :

$$N < 0, \forall \varphi$$

$$\Rightarrow -3mg \cos(\varphi) + 2mg - m \frac{v_D^2}{\rho} < 0$$

$$\Rightarrow v_D^2 > -3\rho g \cos(\varphi) + 2\rho g$$

Comme $\cos(\varphi)$ est compris entre -1 et +1, la condition à vérifier quel que soit l'angle φ est :

$$v_D^2 > +3\rho g + 2\rho g \Rightarrow v_D > \sqrt{5\rho g}$$

9. Indiquer pour chaque équation comment elle a été obtenue.

- L'équation (1) est issue de la conservation de l'énergie mécanique de la bille (subissant que des forces conservatives).
- L'équation (2) traduit le fait que la trajectoire est de pente négative, d'angle β par rapport au plan horizontal. D'où la relation sur les composantes de vitesse selon les axes r et z : $v_z = -\tan(\beta)v_r$.

10. • XXX est à remplacer par $z[-1] > z_{\text{fin}}$
 • YYY est à remplacer par $z_{\text{prime}}[-1] - dt * \sin(\beta) * \sqrt{k - 2*g*z[-1]}$
 • ZZZ est à remplacer par $z[-1] + z_{\text{prime}}[-1]*dt$

Problème II - Accéléromètre MEMS

11. Tout plan contenant l'axe (Mx) est plan de symétrie pour la distribution de charges (ddc), donc $\vec{E}(M)$ est contenu dans tous ces plans, donc dans leur intersection, qui est l'axe Mx. Donc $\vec{E}(M)$ est selon \vec{u}_x . De plus, la ddc est invariante par translation selon les axes y et z, donc $\vec{E}(M)$ ne dépend pas de y et z. Ainsi :

$$\boxed{\vec{E}(M) = E(x)\vec{u}_x}$$

Enfin, la ddc est un plan de symétrie pour elle-même ; donc le plan Oyz est plan de symétrie pour le champ électrique. Comme il est selon \vec{u}_x , alors :

$$\boxed{\vec{E}(-x) = -\vec{E}(x)}$$

12. Le théorème de Gauss s'écrit :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S}^{ext} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

On peut choisir comme surface fermée judicieuse un cylindre de section S , d'axe x , s'étendant de $-x$ à $+x$. La charge contenue à l'intérieur vaut $\sigma \times S$. L'intégrale de surface peut s'écrire comme la somme de 3 intégrales portant sur la surface en $+x$, celle en $-x$ et la surface latérale S_{lat} , dont le vecteur surface local est orthogonal au champ électrique (donc $\vec{E} \cdot d\vec{S}_{lat} = 0$). Il reste donc :

$$\begin{aligned} & \iint_{S(+x)} \vec{E} \cdot dS \vec{u}_x + 0 + \iint_{S(-x)} \vec{E} \cdot dS (-\vec{u}_x) = \frac{\sigma \times S}{\varepsilon_0} \\ \Rightarrow & E(x) \times S - E(-x) \times S = 2E(x) \times S = \frac{\sigma \times S}{\varepsilon_0} \\ \Rightarrow & \boxed{\vec{E}(x > 0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_x} \end{aligned}$$

13. Le plan en $x = 0$, chargé $+\sigma$, créé un champ électrique tel que :

$$\vec{E}_{+\sigma} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_x \text{ pour } x > 0 \\ \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_x \text{ pour } -d < x < 0 \\ \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_x \text{ pour } x < -d \end{cases}$$

Le plan en $x = -d$, chargé $-\sigma$, créé un champ électrique tel que :

$$\vec{E}_{-\sigma} = \begin{cases} \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_x \text{ pour } x > 0 \\ \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_x \text{ pour } -d < x < 0 \\ \frac{+\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_x \text{ pour } x < -d \end{cases}$$

En appliquant le principe de superposition, le champ électrostatique total vaut $\vec{E}_{condo} = \vec{E}_{+\sigma} + \vec{E}_{-\sigma}$, d'où :

$$\boxed{\vec{E}_{condo} = \begin{cases} \vec{0} \text{ pour } x > 0 \\ -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_x \text{ pour } -d < x < 0 \\ \vec{0} \text{ pour } x < -d \end{cases}}$$

14. Sachant que $\vec{E} = -\nabla V$ en électrostatique, et que \vec{E} est porté par l'axe x , alors on a :

$$\vec{E}_{condo} = -\frac{dV_{condo}}{dx} \vec{u}_x$$

En intégrant par rapport à x , et en tenant compte des informations fournies sur le potentiel, on obtient :

$$V_{condo} = \begin{cases} +\frac{\sigma}{\varepsilon_0}d \text{ pour } x > 0 \\ +\frac{\sigma}{\varepsilon_0}(x+d) \text{ pour } -d < x < 0 \\ 0 \text{ pour } x < -d \end{cases}$$

15. La capacité C d'un condensateur est définie par la relation $Q = C \times U$, où Q est la charge de l'armature positive et U la différence de potentiel entre l'armature chargée positivement et celle chargée négativement. Ici on a $Q = \sigma \times S$ et $U = V(0) - V(-d) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}d$. Donc :

$$Q = \sigma \times S = C \times \frac{\sigma}{\varepsilon_0}d$$

$$\Rightarrow C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

16. Avec les paramètres proposés, on a :

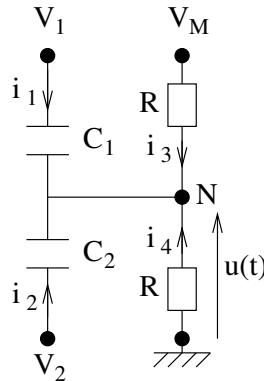
$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d+x} \text{ et } C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d-x}$$

D'où :

$$C' = C_1 + C_2 = \frac{2d\varepsilon_0 S}{d^2 - x^2}$$

et

$$k = \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} = \frac{x}{d}$$



17. En appliquant la loi des noeuds en N (où $V_N = u(t)$), on a :

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 + i_3 + i_4 &= 0 \\ \Rightarrow C_1 \frac{dV_1 - V_N}{dt} + C_2 \frac{dV_2 - V_N}{dt} + \frac{V_M - V_N}{R} + \frac{0 - V_N}{R} &= 0 \\ \Rightarrow C_1 \alpha \frac{d \cos(\Omega t)}{dt} - C_1 \frac{du}{dt} - C_2 \alpha \frac{d \cos(\Omega t)}{dt} - C_2 \frac{du}{dt} + \frac{V_M - u}{R} - \frac{u}{R} &= 0 \\ \Rightarrow (C_1 + C_2) \frac{du}{dt} + \frac{2}{R}u &= (C_1 - C_2)\alpha \frac{d \cos(\Omega t)}{dt} + \frac{V_M}{R} \\ \Rightarrow \frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} &= k\alpha \frac{d \cos(\Omega t)}{dt} + \frac{V_M}{2\tau} \end{aligned}$$

18. La solution du régime transitoire correspond à la solution de l'équation :

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = 0 \Rightarrow u(t) = K \exp(-t/\tau)$$

qui devient négligeable devant la solution en régime permanent lorsque $t \gg \tau$).

19. Pour la solution particulière de l'équation réduite :

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = \frac{V_M}{2\tau}$$

on trouve immédiatement :

$$U_2 = \frac{V_M}{2}$$

Pour la solution particulière de l'équation réduite :

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = k\alpha \frac{d \cos(\Omega t)}{dt}$$

le passage en notation complexe donne :

$$\begin{aligned} j\Omega \underline{u} + \frac{\underline{u}}{\tau} &= k\alpha \times j\Omega \exp(j\Omega t) \\ \Rightarrow \underline{u} &= \frac{k\alpha j\Omega \tau}{1 + j\Omega \tau} \exp(j\Omega t) \\ \Rightarrow U_1 &= \frac{k\alpha \Omega \tau}{\sqrt{1 + \Omega^2 \tau^2}} \text{ et } \varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan(\Omega \tau) \end{aligned}$$

Sachant que $\Omega \tau \gg 1$, alors :

$$U_1 \simeq k\alpha \text{ et } \varphi \simeq 0$$

d'où l'expression finale de la solution en régime permanent :

$$u(t) = k\alpha \cos(\Omega t) + \frac{V_M}{2}$$

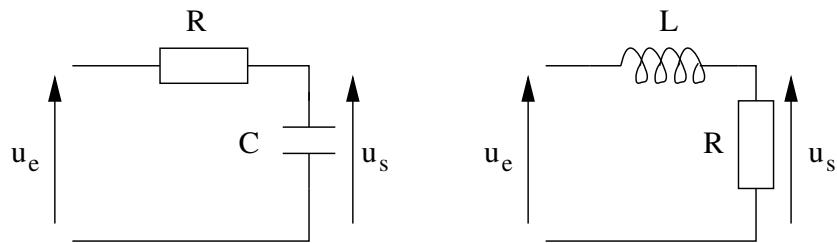
20. On reconnaît la technique de [détection synchrone]. On a :

$$w(t) = \left(k\alpha \cos(\Omega t) + \frac{V_M}{2} \right) \times \alpha \cos(\Omega t) = k\alpha^2 \cos^2(\Omega t) + \frac{V_M}{2} \alpha \cos(\Omega t)$$

$$\Rightarrow \langle w(t) \rangle = \frac{k\alpha^2}{2} = \frac{x\alpha^2}{2d}$$

On voit que cette valeur moyenne est proportionnelle à x . Comme montage simple pour extraire la valeur moyenne d'un signal, utiliser un montage RC, avec tension de sortie prise aux bornes de C. Ou bien un montage RL, avec tension de sortie prise aux bornes de R. Pour obtenir la composante continue et éliminer les signaux de fréquence non nulle, respecter les conditions :

$$\boxed{\frac{1}{RC} \ll \Omega} \text{ ou } \boxed{\frac{R}{L} \ll \Omega}$$



Problème IIIa - Casserole sur une plaque à induction

21. La distribution de courant admet tout plan contenant l'axe Oz comme plan d'antisymétrie. Donc le champ magnétique en un point M_{axe} de cet axe est contenu dans tous ces plans, donc dans leur intersection, qui est l'axe Oz. Ainsi, le champ magnétostatique en un point M_{axe} est selon le vecteur \vec{u}_z .

22. En écrivant le théorème d'Ampère :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

on en déduit qu'un champ magnétique est proportionnel à μ_0 , un courant électrique et inversement proportionnel à une longueur. D'où :

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R_{spire}}$$

23. Avec un dessin et le théorème de Pythagore, on a :

$$\sin(\varphi) = \frac{R_{spire}}{\sqrt{R_{spire}^2 + z^2}}$$

d'où :

$$\vec{B}_{axe} = B_0 \frac{R_{spire}^3}{(R_{spire}^2 + z^2)^{3/2}} \vec{u}_z$$

24. Il s'agit de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

La forme intégrale de cette équation est la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

avec la force électromotrice e :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

le longueur d'un contour fermé orienté C et le flux du champ magnétique Φ :

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

à travers une surface s'appuyant sur le contour C . L'orientation du contour C et du vecteur surface $d\vec{S}$ respectent la règle de la main droite.

25. On applique la loi de Faraday sur un cercle de rayon r d'axe Oz, avec $d\vec{l} = rd\theta \vec{u}_\theta$ et $d\vec{S} = dS \vec{u}_z$. Il vient :

$$\oint_C E_{cass}(r, t) \vec{u}_\theta \cdot d\vec{l} \vec{u}_\theta = 2\pi r \times E_{cass}(r, t) = -\frac{d}{dt} \iint_S B_1 \cos(\omega t) \vec{u}_z \cdot dS \vec{u}_z = +B_1 \omega \sin(\omega t) \times \pi r^2$$

$$\Rightarrow E_{cass}(r, t) = \frac{B_1 \omega r}{2} \sin(\omega t)$$

- 26.** • $\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$ est la densité volumique d'énergie électromagnétique, en $J.m^{-3}$.
- $\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ est le vecteur de Poynting, dont la norme désigne la puissance électromagnétique traversant une surface normale unité, en $W.m^{-2}$.
- $-\vec{j} \cdot \vec{E}$ est la puissance volumique cédée aux charges par le champ électromagnétique, en $W.m^{-3}$.

27. La loi d'Ohm locale s'écrit :

$$\boxed{\vec{j} = \sigma \vec{E}}$$

avec σ la conductivité électrique du milieu. Alors la puissance volumique dissipée par effet Joule s'écrit :

$$P_{J,vol} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \sigma E_{cass}^2(r, t)$$

La puissance dissipée dans le fond de la casserole s'obtient en intégrant la puissance volumique sur le fond cylindrique :

$$\begin{aligned} P_J(t) &= \iiint_{V_{cass}} P_{J,vol} dV = \int_{r=0}^{R_{cass}} \sigma E_{cass}^2(r, t) 2\pi r dr \times e = \sigma \frac{B_1^2 \omega^2}{4} \sin^2(\omega t) 2\pi e \int_{r=0}^{R_{cass}} r^3 dr \\ &= \frac{\pi}{8} \sigma B_1^2 e \omega^2 \sin^2(\omega t) R_{cass}^4 \Rightarrow \boxed{P_J = \langle P_J(t) \rangle = \frac{\pi}{16} \sigma B_1^2 e \omega^2 R_{cass}^4} \end{aligned}$$

- 28.** On applique le premier principe de la thermodynamique à l'eau contenue dans la casserole, entre $t = 0$ et τ . La transformation s'effectuant à pression constante, c'est la forme enthalpique qu'on retient :

$$\Delta H = Q \Rightarrow \rho \times \pi R_{cass}^2 H_{cass} \times c_p (T_c - T_f) = P_J \times \tau \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{\rho \times \pi R_{cass}^2 H_{cass} \times c_p (T_c - T_f)}{P_J}}$$

- 29.** AN : $\boxed{\tau \simeq 8,3.10^2 s}$ (soit 13,8 minutes).

- 30.** On applique le premier principe de la thermodynamique à l'eau contenue dans la casserole, entre t et $t + dt$, en version enthalpique :

$$dH = \delta Q \Rightarrow \rho \times \pi R_{cass}^2 H_{cass} \times c_p dT_{eau} = +P_J \times dt - h \pi R_{cass}^2 (T_{eau} - T_f) \times dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dT_{eau}}{dt} + \frac{h}{\rho H_{cass} c_p} T_{eau} = \frac{P_J}{\rho \times \pi R_{cass}^2 H_{cass} \times c_p} + \frac{h}{\rho H_{cass} c_p} T_f}$$

Problème IIIb - Réseau Internet

31. Un entier décimal compris entre 0 et 255 est codé sous la forme d'un nombre binaire à 8 bits (soit un octet), car $255 = 2^8 - 1$. Donc 4 entiers décimaux, chacun compris entre 0 et 255, est représentable par 4 octets, soit $4 \times 8 = 32$ bits. Dans la version IPv4, il y a donc $2^{32} = 4294967296$ adresses possibles. C'est donc moins que le nombre total d'habitants sur Terre, estimé à environ 8 milliards. Voilà pourquoi on va passer à l'IPv6, car le nombre d'adresses différentes possibles avec l'IPv4 est trop limité!
32. def dec2byte(nombre: int) -> str:
 byte = ""
 quotient = nombre
 while quotient != 0:
 reste = quotient % 2
 byte = str(reste) + byte # évite de renverser la chaîne byte à la fin
 quotient = quotient//2
 n = len(byte)
 return (8-n)*"0" + byte # complète avec des éventuels zéros à gauche
33. def adresse_IP_valide(adresse: str) -> bool:
 octets = adresse.split('.')
- ```
if len(octets) != 4:
 return False
for octet in octets:
 if not octet.isdigit():
 return False
 valeur = int(octet)
 if valeur < 0 or valeur > 255:
 return False
 if len(octet) > 1 and octet[0] == "0":
 return False
return True
```
34. def bit\_de\_parite(sequence: str) -> str:  
 somme\_de\_1 = 0  
 for bit in sequence:  
 if bit == "1":  
 somme\_de\_1 += 1  
 if somme\_de\_1 % 2 == 0:  
 return "0"  
 else:  
 return "1"
35. def verif(sequence: str) -> bool:  
 cpt\_de\_1 = 0  
 for bit in sequence:  
 if bit == "1":  
 cpt\_de\_1 += 1  
 return cpt\_de\_1%2 == 0

**36.** Avec l'algorithme glouton proposé, le chemin qui sera trouvé sera :

$$A \xrightarrow{5} B \xrightarrow{1} C \xrightarrow{1} D \xrightarrow{8} F$$

soit une durée de 15. Or le chemin le plus rapide est :

$$A \xrightarrow{9} C \xrightarrow{2} E \xrightarrow{1} F$$

soit une durée de 12. Parmi les atouts de cet algorithme, on peut citer sa simplicité à coder et sa rapidité d'exécution (avantages usuels des heuristiques de type glouton). Mais les défauts est qu'on obtient pas forcément l'optimum global (ici le chemin le plus rapide). Pire, on peut imaginer des réseaux où l'algorithme n'atteint pas le sommet "F" (un algorithme glouton ne revenant jamais "en arrière", s'il suit un chemin jusqu'à un sommet où tous ses voisins ont déjà été visités, l'algorithme s'arrête sans fournir de chemin se finissant par celui visé).

**37.** L'exécution de

```
>>> parcours(graphe, "A","F")
```

renvoie

```
['A', 'C', 'E', 'F']
```

Il s'agit du chemin le plus rapide. Cependant, c'est un heureux hasard ! En effet, le programme n'exploite pas la durée de chaque connexion. Avec un algorithme de type "parcours en profondeur", on est sûr de trouver un chemin reliant l'ordinateur de départ à l'ordinateur d'arrivée. Mais il ne respecte aucune contrainte sur la durée totale du chemin obtenu !

**38.** SELECT Prénom, Nom FROM Clients

```
WHERE Département = 75
```

**39.** SELECT Désignation, Opérateur FROM Forfaits

```
WHERE Réseau = "Fibre"
```

```
AND PrixMensuel >= 20 AND PrixMensuel <= 40
```

```
ORDER BY Opérateur
```

**40.** SELECT Désignation, PrixMensuel FROM Forfaits

```
JOIN Abonnements ON Abonnements.IdForfait = Forfaits.IdForfait
```

```
JOIN Clients ON Clients.IdClient = Abonnements.IdClient
```

```
WHERE Prénom = "Hubert" AND Nom = "Johnson"
```

**41.** SELECT COUNT(\*), Opérateur FROM Clients

```
JOIN Abonnements ON Abonnements.IdClient = Clients.IdClient
```

```
JOIN Forfaits ON Forfaits.IdForfait = Abonnements.IdForfait
```

```
WHERE Département = 60
```

```
GROUP BY Opérateur
```

Code dossier

|  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|

Nom

|         |  |  |  |  |  |  |  |
|---------|--|--|--|--|--|--|--|
| CORRIGÉ |  |  |  |  |  |  |  |
|---------|--|--|--|--|--|--|--|

Prénom

|      |  |  |  |  |  |  |  |
|------|--|--|--|--|--|--|--|
| SCEI |  |  |  |  |  |  |  |
|------|--|--|--|--|--|--|--|

Centre

Date

|    |   |    |   |      |
|----|---|----|---|------|
| 10 | / | 04 | / | 2025 |
|----|---|----|---|------|

Pour répondre aux questions, merci de cocher la case de votre choix de la manière suivante :

## EPREUVE DE FRANCAIS

Sélectionnez votre questionnaire A  B

|    | A                                   | B                                   | C                                   | D                                   |
|----|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| Q1 | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| Q2 | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| Q3 | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| Q4 | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| Q5 | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |

|     | A                        | B                                   | C                                   | D                                   |
|-----|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| Q11 | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| Q12 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| Q13 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| Q14 | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| Q15 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |

|     | A                                   | B                                   | C                                   | D                                   |
|-----|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| Q21 | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| Q22 | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| Q23 | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| Q24 | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| Q25 | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |

|     | A                                   | B                        | C                                   | D                                   |
|-----|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| Q31 | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| Q32 | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| Q33 | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| Q34 | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| Q35 | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |

|     | A                                   | B                                   | C                                   | D                        |
|-----|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| Q6  | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/> |
| Q7  | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Q8  | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/> |
| Q9  | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/> |
| Q10 | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

|     | A                                   | B                                   | C                                   | D                                   |
|-----|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| Q16 | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| Q17 | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| Q18 | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| Q19 | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| Q20 | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |

|     | A                                   | B                                   | C                        | D                                   |
|-----|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| Q26 | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| Q27 | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| Q28 | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| Q29 | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| Q30 | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

|     | A                                   | B                                   | C                        | D                                   |
|-----|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| Q36 | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| Q37 | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| Q38 | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| Q39 | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| Q40 | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |

Cadre réservé au correcteur : Note /40

Code dossier

Nom **CORRIGÉ**

Prénom **SCEI 2025**

Centre

Date

**10 / 04 / 2025**

Pour répondre aux questions, merci de cocher la case de votre choix de la manière suivante :

## EPREUVE D'ANGLAIS

Sélectionnez votre questionnaire A  B

|    | A                                   | B                                   | C                                   | D                                   |
|----|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| Q1 | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| Q2 | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| Q3 | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| Q4 | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| Q5 | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |

|     | A                                   | B                                   | C                                   | D                        |
|-----|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| Q11 | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/> |
| Q12 | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/> |
| Q13 | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Q14 | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/> |
| Q15 | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/> |

|     | A                                   | B                                   | C                        | D                                   |
|-----|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| Q21 | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| Q22 | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| Q23 | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| Q24 | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| Q25 | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |

|     | A                        | B                                   | C                                   | D                                   |
|-----|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| Q31 | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| Q32 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| Q33 | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| Q34 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| Q35 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |

|     | A                        | B                                   | C                                   | D                                   |
|-----|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| Q6  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| Q7  | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| Q8  | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| Q9  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| Q10 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |

|     | A                                   | B                        | C                        | D                                   |
|-----|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| Q16 | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| Q17 | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| Q18 | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| Q19 | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| Q20 | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |

|     | A                                   | B                                   | C                                   | D                        |
|-----|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| Q26 | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Q27 | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/> |
| Q28 | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Q29 | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Q30 | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/> |

|     | A                                   | B                                   | C                                   | D                                   |
|-----|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| Q36 | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| Q37 | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| Q38 | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| Q39 | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| Q40 | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |

Cadre réservé au correcteur : Note

/40